展示紹介資料
（ホームページ公開用）

黄金比

人間が最も美しいと感じる比、らしい。

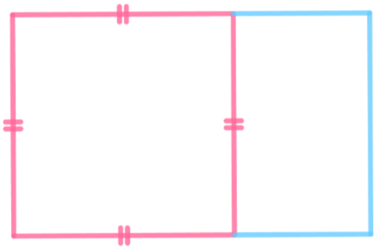
$1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ およそ $1 : 1.618$ 。

※$\sqrt{5}$は２乗すると５になる、つまり$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$となる数です。($\sqrt{5} \fallingdotseq 2.23\cdots$)

例① 黄金長方形

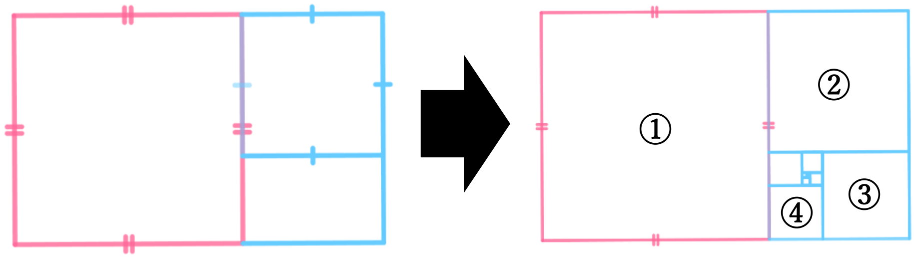
問題

大きい長方形を、正方形と小さい長方形に分かれるようにカットします。
大きい長方形と小さい長方形が**相似**になるためには、もとの長方形の縦と横の比がどのような値であればよいでしょうか？



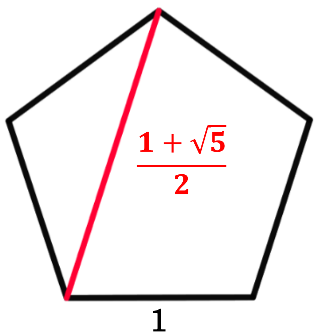
答 黄金比 （証明は補足資料で。）

小さい長方形を、もう一度正方形と長方形に分かれるようにカットすると…。
この操作はいくらでも続けることができ、右のように正方形がらせん状に並びます！



例② 正五角形の対角線

１辺の長さが１の正五角形は、対角線の長さが$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
つまり黄金比になります！
（こちらも証明は補足資料で。）



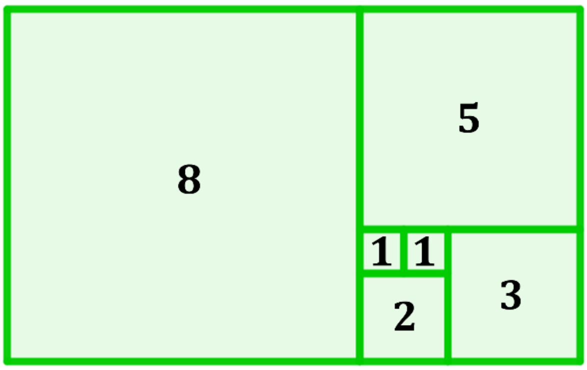
黄金比とフィボナッチ数列

フィボナッチ数列の「隣り合う2つの数の比」は黄金比に近づいていきます！

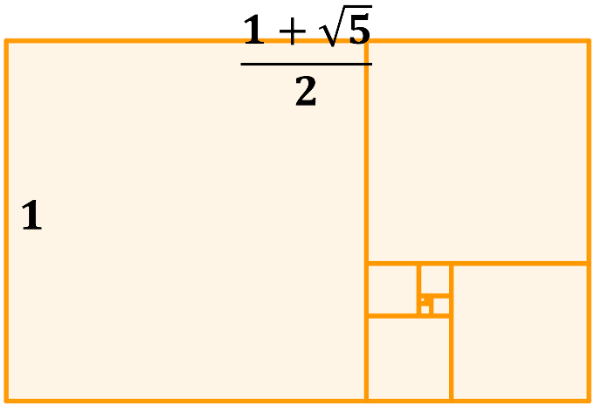
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	…
1	2	1.5	1.666…	1.6	1.625	1.615…	1.619…	…

直観的説明

黄金比は、$1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 : 1.6180339\cdots$



フィボナッチ数列のそれぞれの数を
一辺とする正方形を並べた図



黄金長方形

似てる！

左の図のようにフィボナッチ数列の正方形を並べていくと、
だんだん右の黄金長方形に近づいていきます！※一致はしない

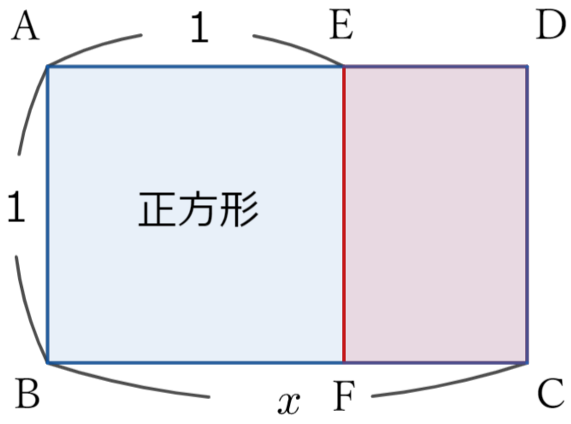
つまり、左の長方形の縦と横の比
（＝フィボナッチ数列の隣り合う２つの数の比）が
黄金比に近づいていく、ということ！

presented by

補足資料
「黄金長方形」の証明

長方形から正方形を切り抜いて、残った長方形がもとの長方形と相似になるとき、

その長方形は縦と横の比が黄金比、$1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。



[証明]
長方形 ABCD の縦の長さを 1、横の長さを x とおく。
右図より、長方形 CDEF の縦の長さは 1、
横の長さは$x-1$である。
長方形 ABCD と長方形 CDEF は相似であるので、
$1 : x = (x-1) : 1$
整理して、$x^2 - x - 1 = 0$
この方程式を解くと、$x > 0$ より $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
したがって、この長方形は黄金長方形である。(終)

補足資料
「正五角形と黄金比」の数学的解説

「正五角形の１辺と**対角線**の長さの比は黄金比になる」ことを示します。

一辺が１の正五角形 ABCDE で，対角線 AC，AD を引き，
∠ACD の二等分線と AD の交点を F とすると，
図１のように角度が求まります。
これにより，△ACD と△CDF は二等辺三角形であることが分かります。

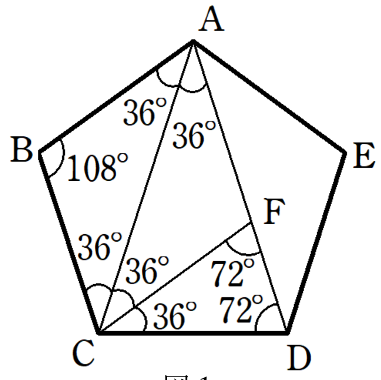


図 1

ここで，対角線 AC=xとおきます。
すると，図２のように辺の長さを置くことができます。
二角相等より，△ACD∽△CDF なので，

$$x : 1 = 1 : (x-1)$$
$$x(x-1) = 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$より，$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

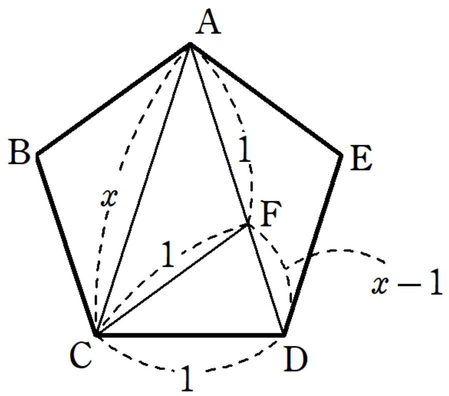
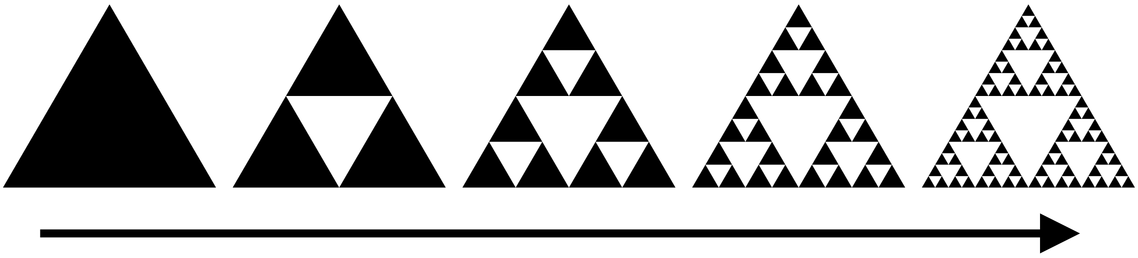


図 2

≪参考文献≫
https://mathsuke.jp/pentagon-goldenratio/（2023/10/06 閲覧）

シェルピンスキーの三角形

正三角形から小さな正三角形をくりぬいて小さな正三角形を 3 つ作る。
この操作を無限に繰り返したものが**シェルピンスキーの三角形**です。



このように、同じ操作を繰り返してできる複雑な図形を**フラクタル**といいます。
(特に、「部分」が「全体」と相似な図形をフラクタルといいます。)

面積0、周の長さ∞

操作を一回施すごとに正三角形が切り取られるので図形の面積は減り、
全ての正三角形の内部に線が 3 本ずつ増えるので図形の周の長さは増えます。
そのため、操作を無限に行うと図形の面積は 0 に近づいていき、
周の長さは限りなく増えていきます。
つまりシェルピンスキーの三角形の**面積は 0、周の長さは∞**だと言えます。

シェルピンスキー四面体

シェルピンスキーの三角形の立体版(正四面体 ver)です。

展示は1枚の紙から作りました

近似的なものは**1枚の紙で**作ることができます。
作り方:①1 枚の紙で正四面体を作る
②正四面体の 4 つの表面を切り、4 つの小さな正四面体を作る。
③図形のすべての正四面体に②を繰り返す。

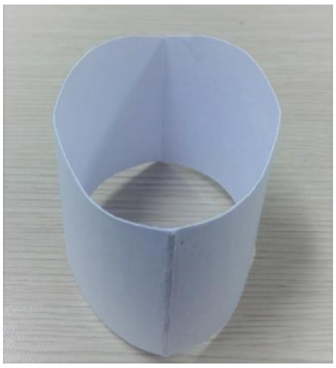
シェルピンスキー四面体は図形の表面を折り返して作ることができるので、
操作前後で図形の表面積は変わりません。
一方、図形の体積は操作ごとに減り、0 に近づいていきます。

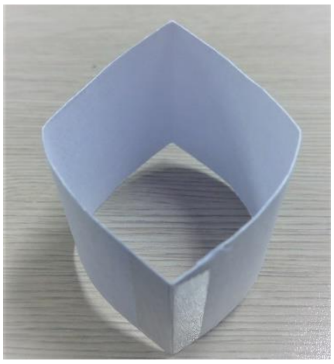
錯視

錯視は「目にしている物体が、異なる物体に見える現象」のこと。
脳が視覚情報を間違って処理することで発生します。

円柱の錯視

手前側からは物体が円柱に見えますが、鏡の中では四角柱に見えます。
これは鏡に映った曲線を、脳が直線と処理しているため発生します。

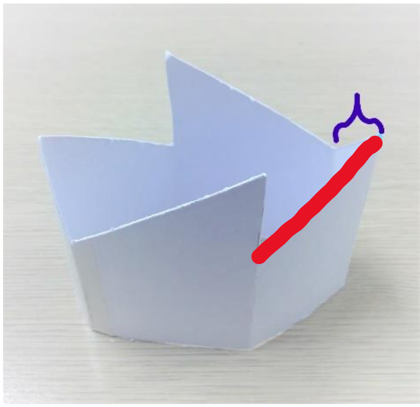




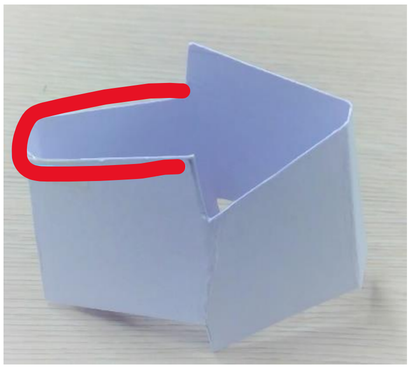
←左の写真は円柱、
右は四角柱に見えますが、
どちらも同じ角度から
写真を撮っています。

矢印の錯視

①
アローヘッド(矢印の先端の部分)の遠近を
脳が錯覚することで、
矢印の形に見える錯視です。
実際には右の写真の紫色で示した部分が、
水色の部分に隠れています。



②
① の矢印とは逆で、シャフト(水色の部分)を
錯視で平行であるようにみせて、
きれいな矢印を形作っています。



補足資料
「相加・相乗平均の不等式」の"目で見てわかる"証明

正の実数a、bに対し、以下の不等式が成り立つ。

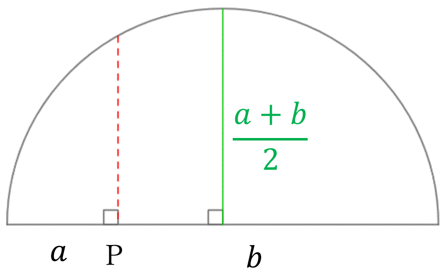
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号成立条件は$a = b$。

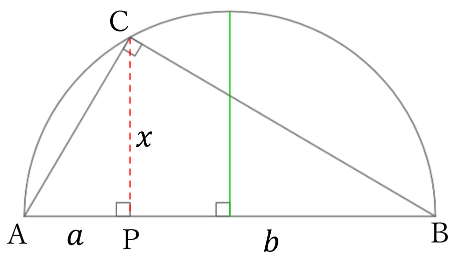
[目で見てわかる証明]

直径が $a+b$ の半円を用意します。
aとbの相加平均 $\frac{a+b}{2}$ は、この円の半径の長さに等しいです。
では、相乗平均は？

実は、点 P に下ろした垂線の長さ（赤）が
aとbの相乗平均 $\sqrt{ab}$ に等しいことがわかります！



理由
図のように点を取り、CP= x とおきます。
△APC∽△CPB より、$a : x = x : b$
よって、$x^2 = ab$
ここで、$x > 0$より、$x = \sqrt{ab}$となります。
円の半径が $\frac{a+b}{2}$ なので、$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$です。



この図を見れば、aとbがそれぞれどんな値であっても、相加平均≧相乗平均であることが一目でわかるはずです！
ついでに、相加平均と相乗平均が等しくなるのは、P がちょうど円の中心にあるとき、つまり$a = b$のときであることもわかります…！

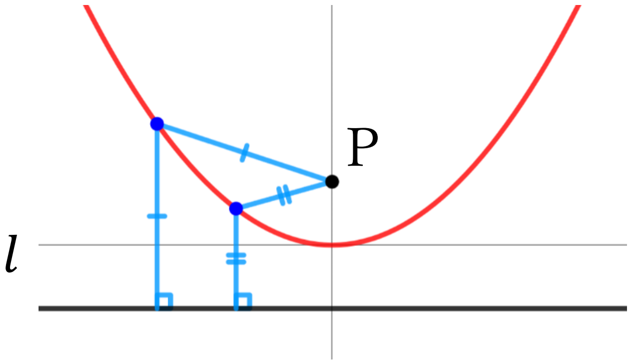
これを体感するおもちゃを作ってみたので、ぜひ中の赤い棒を動かして試してください！

放物線（パラボラ）

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で表されるグラフ。
「物」を「放」り投げたときの軌道に等しいことから名づけられました。

放物線の焦点

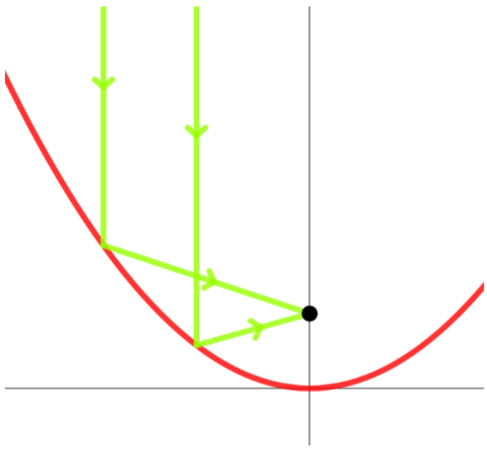
放物線は、「定直線 l と定点 P から等距離にある点の集合」と定義することもできます。直線 l は「準線」、点 P は**「焦点」**と呼ばれます。



放物線の焦点は、
円にとっての中心のようなもの。

パラボラアンテナ

放物線の軸に対して平行に入射する音や光、電波は、放物線上で反射すると必ず焦点を通ります！（しかも同時に。）



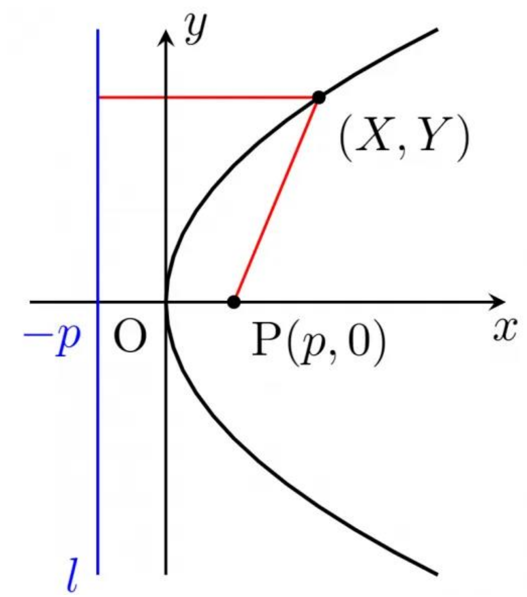
この性質を利用したものが**「パラボラアンテナ」**というアンテナです。
パラボラアンテナは、放物線を（その軸を回転軸として）回転させたときのお椀のような曲面になっています。

電波を受信する場合、この面で電波を受けて反射させ、焦点の位置にある素子に電波を集めます。電波を効率よく送受信ができるアンテナです。

補足資料
放物線の焦点に関する証明2つ

命題１

直線 l と点 P との距離が等しい点の集合は放物線である。



証明１

点 P $(p, 0)$ と直線 l：$x = -p$ からの距離が等しい点

(X, Y)について考える。

P と(X, Y) の距離は$\sqrt{(X-p)^2+y^2}$、lと(X, Y)の距離は$|X+p|$。

仮定より、$\sqrt{(X-p)^2+y^2} = |X+p|$

両辺を二乗して$(X-p)^2+y^2 = (x+p)^2$

さらに変形して、$y^2 = 4px$

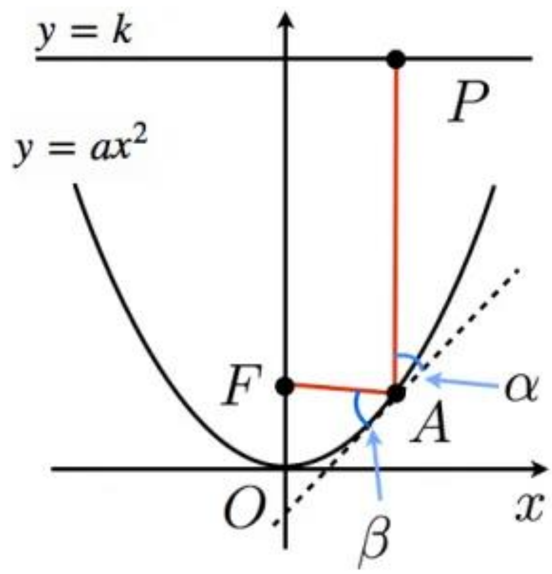
よって、(X, Y) が通る軌跡は放物線になる。

(逆に、放物線$y^2 = 4px$上の点は条件を満たす。）　（終）

画像の出典：https://manabitimes.jp/math/868

命題２：放物線の軸と平行に入る光や電波は放物線上で反射すると必ず同時に焦点を通る。

証明２



点 P (x_0, k) からの軸に平行な電波は、

$y = ax^2$ のグラフにおいて A(x_0, ax_0^2) で反射する。

さらに点 B を $(x_0, 0)$ とする。

反射した後の電波の軌道の傾きをmとすると、

$y - ax_0^2 = m(x - x_0)$　…①

ここで、A での微分係数は$2ax_0$で、

$\tan\alpha = \frac{1}{\tan(90-\alpha)}$　より　$\tan\alpha = \frac{1}{2ax_0}$

加法定理より、$\tan\beta = \frac{2ax_0 - m}{1+2ax_0 m}$

$\alpha = \beta$なので、$\frac{1}{2ax_0} = \frac{2ax_0-m}{1+2ax_0m}$

変形して　$m = ax_0 - \frac{1}{4ax_0}$

これを①に代入して変形すると、$y = mx + \frac{1}{4a}$

よって、mに関わらず、定点 F$\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ を通る。

また、証明１より、PB＝PA＋AB＝PA＋AF

よって電波は同時に定点 F を通る。(終)

画像の出典：https://manabitimes.jp/math/1000

カテナリー曲線(懸垂曲線)

ロープやチェーンなどの両端を持って垂らしたときにできる曲線です。

遊び方

　チェーンの両端をもち、背景の曲線に合わせてみてください。ぴったり一致していることがわかると思います！

　背景の曲線は、チェーンをただ紙に投影して作ったものではなく、数学的に導いて得た曲線なのです。実際に、その式は以下のものになります。

$$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

e は円周率と同じく無理数の一種。$e = 2.718\cdots$。
a は曲線を拡大縮小させる変数です。

難しいですね・・・。
これを説明するには、大学以上の数学と物理の知識が必要になります。

チェーンの両端を近づけることは、カテナリー曲線を縮小して広い視野で見ることに対応しており、逆に両端を遠ざけることは、カテナリー曲線を拡大して狭い視野で見ることに対応しています。

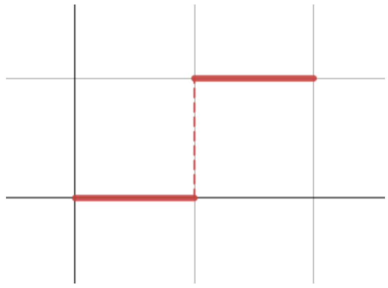
クロソイド曲線

私たちが当たり前のように使っている「道路」に潜む数学です。車道のカーブ部分は、一定の速度でハンドルを切ることで曲がれるように設計されています。こうすることで、より安全な、負荷の少ない運転を実現できるのです。

円の一部を切り取ると

ハンドルを一定の角度ω(オメガ)で切り続けた時にできる円の半径を**曲率半径**r、その逆数を**曲率**$1/r$と言います。

もしも円の一部を切り取ったような形の曲線をカーブに採用した場合、ハンドルを切る角度ωのグラフは右図のような形になります。

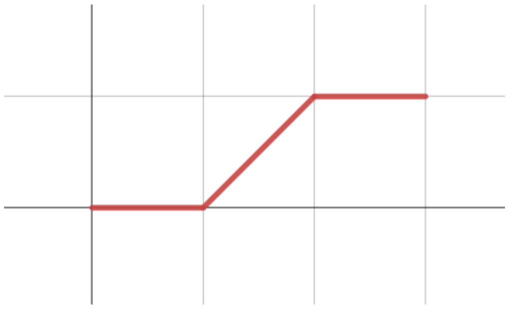


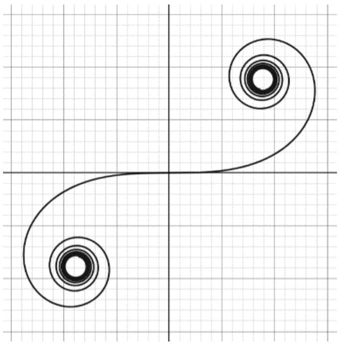
グラフが分離してしまっている。つまり、
その部分で運転手は急激にハンドルを切らなければいけないのです。
これは事故のもとになる、危険な運転です。

より安全な運転へ

角度ωのグラフが分離していない状態、さらにはグラフが直線でつながっている状態だったら、一定の速度でハンドルを傾けていくことでカーブを曲がれるということになります。

右図のようなグラフが具体例であり、このグラフから逆算して得られる曲線が「クロソイド曲線」です。





クロソイド曲線は、一定の速度でハンドルを切ることで曲がれるため、とても安全かつ負担の少ない運転が実現できます。

クロソイド曲線の性質

この曲線は、外側からスタートして内側へと向かうとき、徐々に曲率半径rが小さくなっていくという性質があります。これを定式化してみましょう。

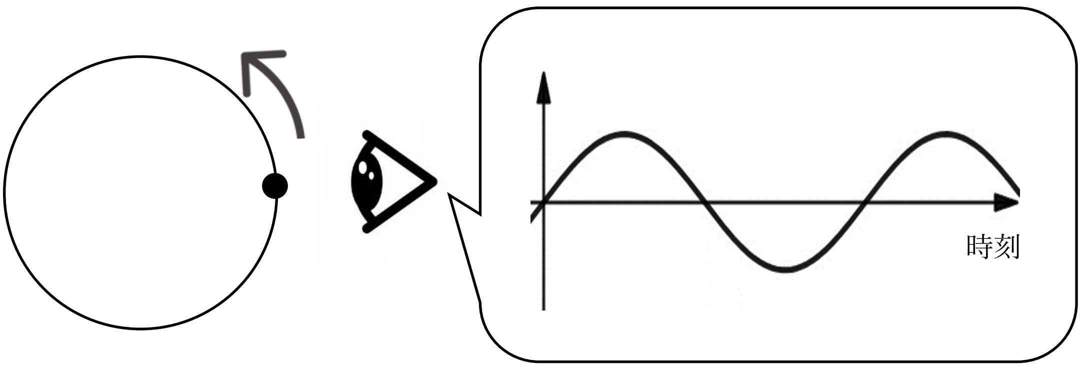
外側の一点から進んだ距離をLとすると、Lが増加するにつれてrが小さくなり、2数の積が一定になるのです。

$$L \times r = A^2（一定）$$

このときのAはクロソイドパラメーターといわれる定数です。そしてこの定数は、そのクロソイド曲線の性質や概形を教えてくれるのです。

正弦曲線（サインカーブ）

正弦曲線とは



左の図のように、円周上を点が回っています。
この点を真横から見たらどのような軌道を描くでしょうか？
時間経過とともにその様子をグラフにすると、右のような波の形をしたグラフができるはずです！このようなグラフを**正弦曲線(サインカーブ)**といいます。

※数学的には、三角関数（$\sin x$、$\cos x$など）のグラフが正弦曲線となります。

日常の中の正弦曲線

実は日常の中にも正弦曲線がひそんでいます。
たとえばらせん階段。実はらせん階段は横から見ると正弦曲線になっています。
（筒状の展示物を横から見るとわかると思います！）
他にも床屋のサインポール、ねじ、私たちの体の中にある DNA もサインカーブの形をしているのです。

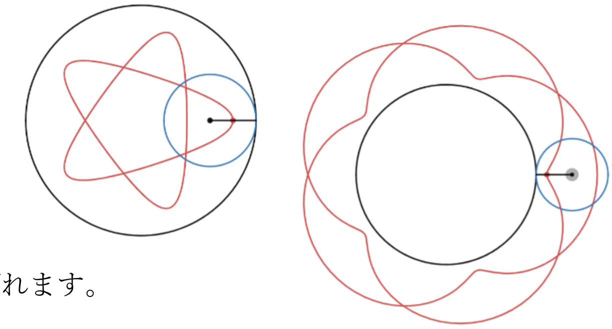



これらすべてがサインカーブ！

Spirographの遊び方

1．紙の上にリングを置きます。
2．中にギアを置き、穴にペンを入れます。
3．ギアがリングとかみ合うように何回も回します。
4．一度書いた線と重なるようになったら完成です！

補足資料
「スピログラフ」の数学的解説



スピログラフで描かれる曲線は、数学的には「**トロコイド**」と呼ばれます。

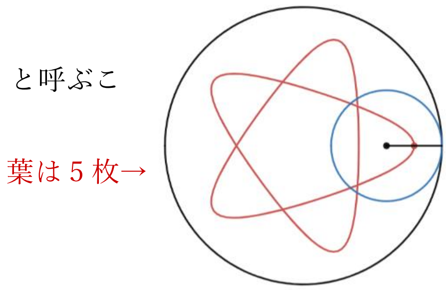
トロコイド（英語: trochoid）とは、円をある曲線（円や直線はその特殊な場合）にそってすべらないように転がしたとき、その円の内部または外部の定点が描く曲線。

出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

特殊な例として、上図の左のように、一方の円が他方の円の内側を転がるとき、**内トロコイド（ハイポトロコイド）**、上図の右のように、外側を転がるとき、**外トロコイド（エピトロコイド）**と呼びます。

“葉”は何枚？

トロコイドにおいて、周期的に繰り返される図形の一部分をここでは「葉」と呼ぶことにします。例えば、右図のトロコイドの葉の枚数は 5 枚です。
この葉の枚数はどうやって決まっているのでしょうか？



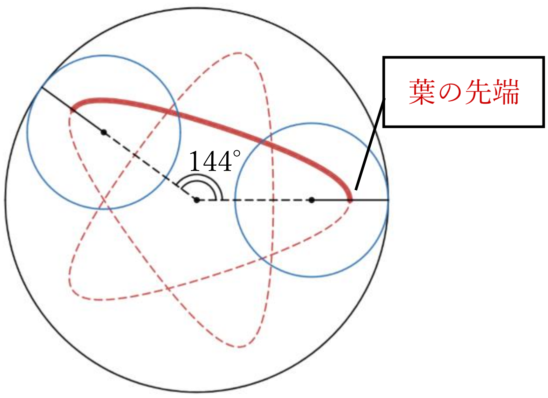
法則　定円の半径：R　動円の半径：r

r/R が有理数のとき、葉の枚数は r/R を既約分数に直したときの分母の値に等しい。
r/R が無理数のとき、葉の枚数は無限。
例）$R=5$、$r=2$のとき、葉は 5 枚。　$R=12$、$r=3$のとき、葉は 4 枚。

証明の概要

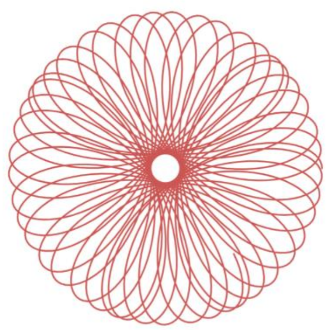
R=5、r=2 の内トロコイドについて考えます。
（一般の半径、外トロコイドについても同様の議論が可能。）

動円が定円に対して 1 回転するとき、葉と葉の先端を結ぶ曲線が描かれます。このとき、動円が転がった周長＝動円の円周です。
つまり、定円の中心に対して先端同士がなす角は図の二重線の角で、
$360° \times r/R = 360° \times 2/5 = 144°$ です。
よって、5 回転したときに点ははじめて元の位置に戻ります。
つまり、葉と葉の先端を結ぶ曲線が合計 5 本なので、葉の枚数は 5 枚となります。



R=5、r=2 の内トロコイド

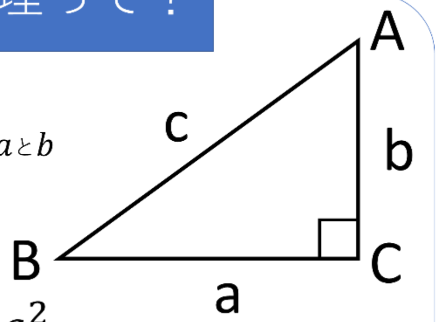
r/R が有理数のときは上と同様の議論で葉の枚数が決まります。
r/R が無理数のときは $360° \times r/R$ を何倍しても 360° の整数倍にはならない、つまり、何回転しても点は初めの位置に戻らないため、無限に葉ができます。
（右図は$R=\sqrt{2}$、$r=1$の内トロコイド。無限枚の葉は実際には描画できず、できても真っ赤に染まるだけなので、ある有限の枚数で描画をやめました。）



三平方の定理の証明

三平方の定理って？

直角三角形の
直角を挟む辺→aとb
一番長い辺→c
とすると、



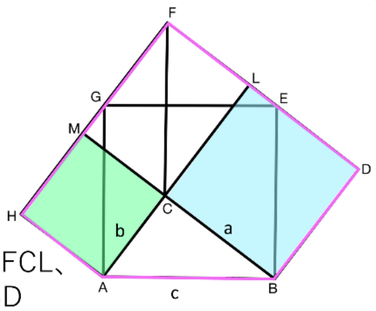
$$a^2+b^2=c^2$$

となる定理のこと。
別名「ピタゴラスの定理」

どんな直角三角形でも
成り立つよ！

証明①

①△ABCの周りに、
ACとBCに接する
正方形を書く。

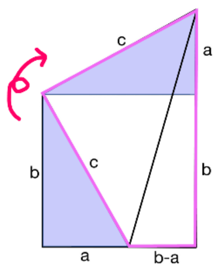


②△ABC、△CFM、△FCL、
△AGH、△GEF、△EBD
が合同になる。

③五角形ABDFHの面積
$=a^2+b^2+$ △ABC+△CFM＋△FCL
$=c^2+$ △AGH＋△GEF＋△EBD
よって、　$a^2+b^2=c^2$

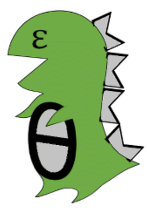
どこが同じ長さかな？

証明②



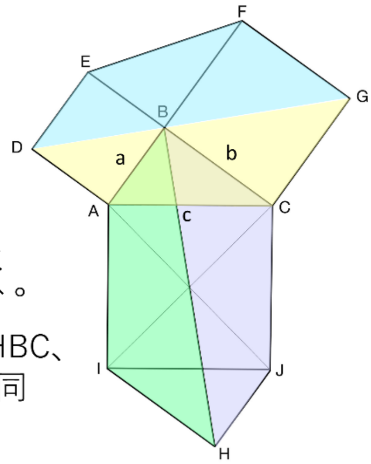
bを一辺とする正方形を描き、
△ABCを移動させる。
ピンクで囲まれた部分の面積は、
$\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(a+b)(b-a)=b^2$
整理すると　$a^2+b^2=c^2$

×2して、引いて…



証明③

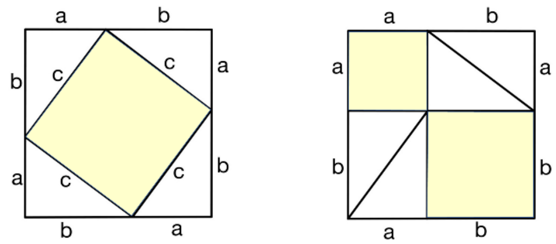
①△ABCの周りに、
各辺を一辺とする
正方形を描く。
cに接する正方形の
反対側に、△ABCと
合同な三角形を描く。

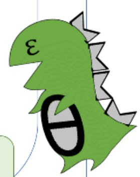


②四角形ABHI、 JHBC、
ADGC、 EDGFが合同
になる。

③六角形ABCJHI、 ADEFGC（四角形二つ分）の面積は、
$=\quad c^2\quad +$△ ABC × 2
$=a^2+b^2+$△ ABC × 2
よって、　$a^2+b^2=c^2$

証明④





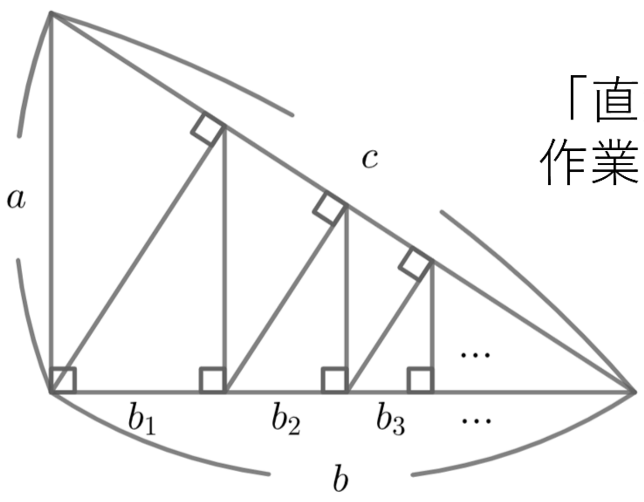
△ABCを４つ並べると、真ん中に一辺
がcの正方形が出来る。
△ABCを寄せても、全体の面積は変わ
らないから　$a^2+b^2=c^2$
であることがわかる。
よって、　$a^2+b^2=c^2$

presented by

証明⑤

「**無限等比級数**」を用いた証明

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad ただし|x| < 1$$



「直角から対辺に垂線を下ろす」作業を連続的に繰り返す。

数列 $b_1, b_2, b_3 \cdots$ は

初項が $b_1 = \frac{a^2}{c^2}b$、公比が $\frac{b^2}{c^2}(= x$ とおく$)$

の等比数列であると示せる。（補足資料より）

$$\begin{aligned} b &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \\ &= b_1 + xb_1 + x^2 b_1 + \cdots \\ &= b_1(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= b_1 \times \frac{1}{1-x} \\ &= \left(\frac{a^2}{c^2}\right)b \times \frac{1}{1-\left(\frac{b^2}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

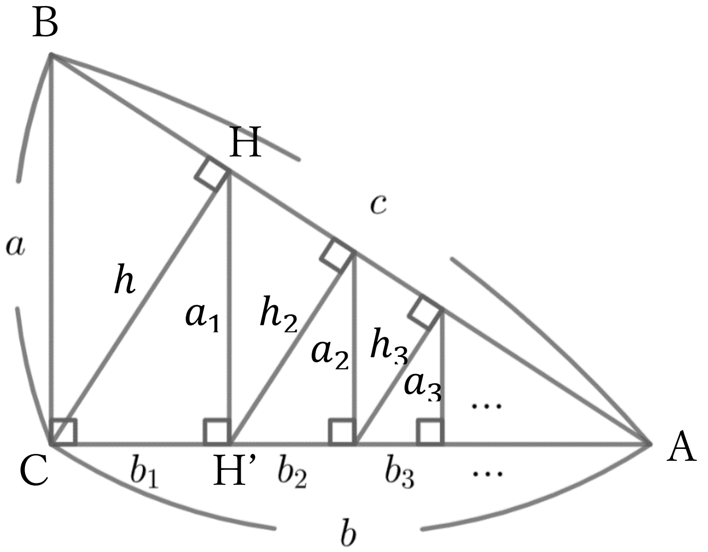
無限等比級数の公式を使った！
$b < c$より$|x| < 1$だからOK！！

整理して→ $a^2 + b^2 = c^2$

補足資料
三平方の定理　証明⑤の補足

①$b_1=\frac{a^2}{c^2}b$ を示す。

②数列 $b_1,b_2,b_3,\cdots$ が公比 $\frac{b^2}{c^2}$ の等比数列であることを示す。



①　△ABC∽△CBH より

$$h=b\times\frac{a}{c}$$

△ABC∽△HCH'より、

$$b_1=h\times\frac{a}{c}$$

よって、$b_1=b\times\frac{a}{c}\times\frac{a}{c}=\frac{a^2}{c^2}b$

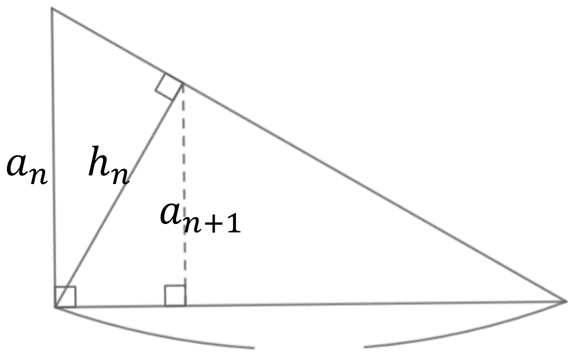
（終）

②　n を自然数とする。

$\frac{a_{n+1}}{h_n}=\frac{b}{c}$,　$\frac{h_n}{a_n}=\frac{b}{c}$　より、$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b^2}{c^2}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b^2}{c^2}$$

したがって数列 $b_1,b_2,b_3,\cdots$ は公比 $\frac{b^2}{c^2}$ の等比数列。



（終）