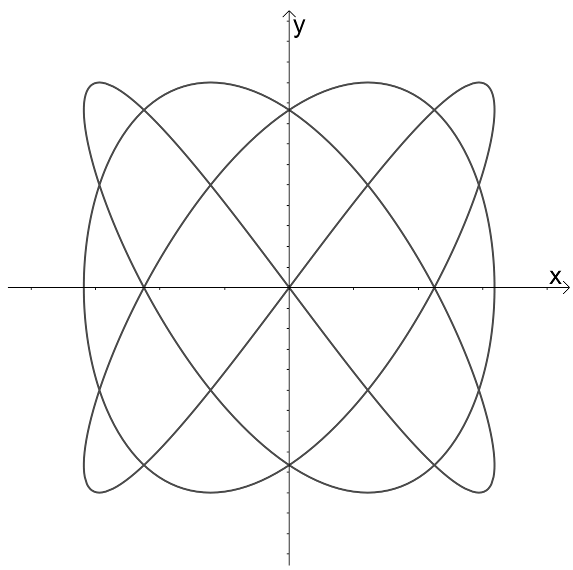
Waseda Jitsugyo

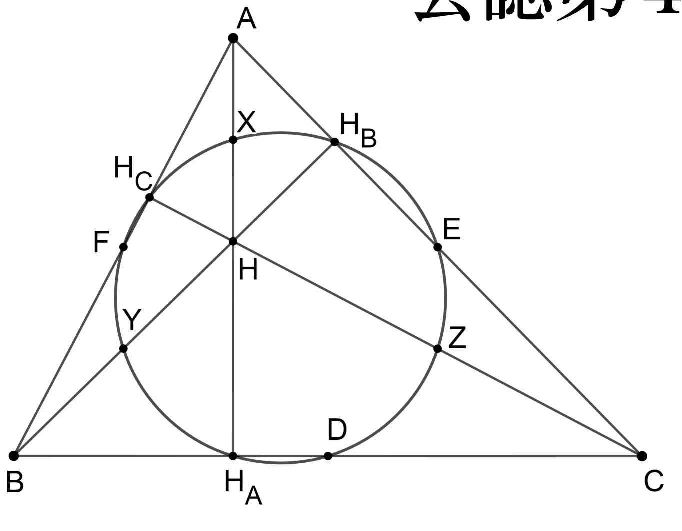


数研
2019

10月5日,6日いなほ祭

早稲田大学系属早稲田実業学校
数学研究同好会

会誌第４号



Mathematics Club

はじめに

本日は、2019年度いなほ祭、また数学研究同好会ブース「いつも通りのmathematics」にお越しくださり、誠にありがとうございます。今年で数研も文化祭参戦4回目＆部誌も第4号となりました！

今年の数研は、優秀な新入生が何人も入り、展示をはじめとする各コーナー、そしてこの部誌も、昨年よりもさらにパワーアップ、充実したと思います。

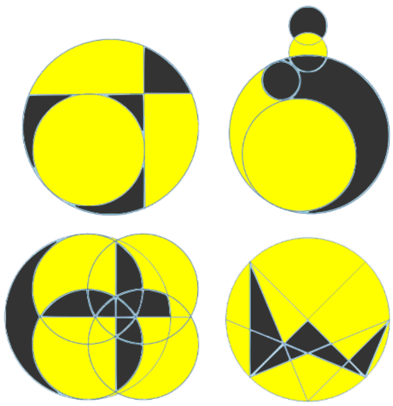
この部誌では、数研部員たちが、自分の好きなテーマで数学の面白さ、凄さ、魅力を紹介します。この部誌で数学を楽しい！面白い！と感じていただけたら幸いです。もし、「分からないよ…」と思われたとしても、この部誌は、数研部員たちの努力の結晶ですので、とっておいてください！数年後にもう1度見ると、新たな発見があるかも！(？)

それでは、数学研究同好会部誌第4号をお楽しみください！

すうけんの沿革

2015年度　数学研究会設立
2016年度　文化祭に初めて参戦！
2017年度　ＪＭＯ本選進出1名　ＪＪＭＯ本選進出1名
2018年度　有志団体数学研究会から数学研究同好会に昇格！！
　　数学甲子園予選出場
　　稲門ジュニア(早稲田大学附属・系属中高の研究発表会)での発表
　　ＪＪＭＯ本選進出1名
　　早稲田中高数学研究同好会との合同数研開催
2019年度　解析ゼミ開催
　　数学甲子園予選出場

もくじ



第１章

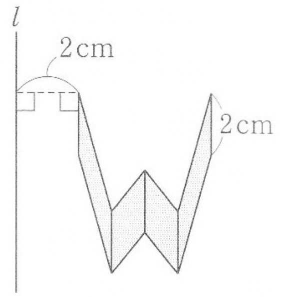
算数から数学へ

中等部１年　＊＊＊＊＊＊

受験の算数では答えに重点を置きますが、数学は根拠となる式や考え方を示すことも大切です。
数学好きな人の中には、小学生の頃、受験用の算数雑誌「中学への算数」(東京出版)に毎月チャレンジして、自分がどのくらいの実力なのかを試してきた人も多いと思います。特に、読者への挑戦問題というページ(レポートで提出する)では、難問に、先生の辛口な評価や解説があり、楽しかった思い出があります。
2018年3月号は易しい問題で、「W」の図形でもあったので、解き方と考え方を紹介します。

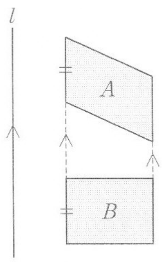
挑戦問題

右図のようなWの形をした図形(4つの平行四辺形を並べたもので面積は5㎠）を、ℓのまわりに1回転させてできる立体の体積を求めなさい。
円周率は3.14 とする。



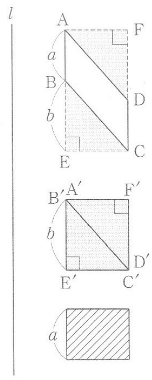
解説

　この問題は、右図のA(平行四辺形)をℓのまわりに回転させてできている立体の体積が、B(長方形)をℓのまわりに回転させてできる立体の体積と等しいことを示すのがポイントである。



解き方①

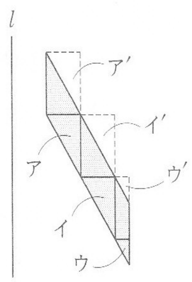
右図の平行四辺形ABCDをℓのまわりに1回転させてできる立体は、長方形AECFを回転させてできる立体から、 三角形AFD,三角形BECを回転させてできる立体を取り除いたものである。よって、高さが $a+b$のドーナツ状の立体から、高さがbの(底面の形が同じ)ドーナツ状の立体を引くと、高さがaのドーナツ状の立体となる、これは右の斜線部の長方形をℓのまわりに1回転させた立体と体積が等しい。



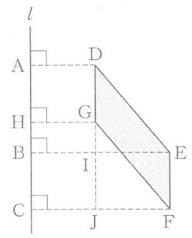
あとは、どのように平行四辺形を長方形にうつしかえたかのポイントを列挙してみる。

解き方②

右図のように細かく分割して、アはア’、イはイ’、ウはウ’の位置に移動してから回転しても体積は変わらない。そこで、 移動後にできた3つの長方形をさらに上下にずらして (この操作でも体積は変わらないので)1つの長方形を回転させたものと同じにできる。

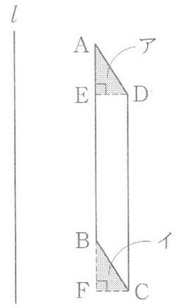


解き方③

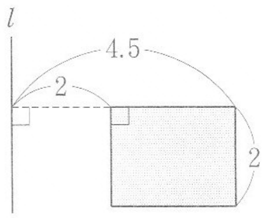


図形Xを回転させた図形を<X>のように表すとすると、
<DGFE>=<ABED>+<BCFE>－<HCFG>－<AHGD>
であり、<ABED>と<HCFG>は等しいので、
これは<BCFE>－<AHGD>つまり<IJFE>と等しくなる。
つまり、<DGFE>=<IJFE>

解き方④



あらかじめ平行四辺形をタテに細長く細分しておけば、 アを回転した部分を、イを回転した部分にうつしかえることができ、平行四辺形 ABCDを回転した立体の体積は、長方形EFCDを回転した立体の体積と等しくなる。



このようにさまざまな解き方があるが、一つ一つ平行四辺形の回転を長方形の回転におき直したあとは、それらをさらに合体させて右図の長方形をℓのまわりに回転させたドーナツ状の立体の体積を求めればよい。これは“円柱－円柱”の形になっており、
(4.5×4.5－2×2) ×3.14×2＝**102.05**
<u>A.　102.05㎤</u>

なお、答えが合っていても、考え方も説明できなければ正解とならない。

＜正誤判定基準＞
i) パップス·ギュルダンの定理を、証明なしに用いる、あるいはそれに相当するものを納得のいくイメ―ジを書かないで使ったものは誤答とする(小学生でパップス·ギュルダンの定理を証明できる人はほとんどいないはずで、重心の積分による定義と技巧的な積分の式変形が必要となるため)。

パップス・ギュルダンの定理とは 回転体の体積＝回転させる図形の面積×重心が動いた長さ

ii) 「等積変形を使って」という意味のことを書いた場合、等積変形という用語自体、平面図形からきた概念で、立体に適用する場合には、細心の注意が必要のはず。したがって、これは根拠が明示してあれば正解とする。
根拠を書いていないものや、「上から眺めると」という表現を使ったものは準正解とする。
iii) 積分や極限の概念などを明示して(あるいは感覚的に)使っているものは、考え方があっていて、答えもあっている場合に限り正答とする。“限りなく細かく分けて”という表現は正答とする。
また、「平行四辺形の形が問題文に書かれていないので、長方形に変形しても答は同じになるはずだから…」のような解答は、明らかな間違いとした。

私は③の解き方で答えを出しましたが、この正誤解説を読んだ時、算数と数学の大きな違いを感じ、数学の奥深さに興味を持ちました。小学生までは答えに重点を置いていたけれど、数学の奥深さを知ることが、今からとても楽しみです。

参考文献
・「中学への算数　2018年3月号」東京出版
・すぐるの算数カルチャー講座　http://www.suguru.jp/culture/

第２章

三角関数の微分法の証明

中等部１年　＊＊＊＊＊＊

突然ですが、三角関数の微分法をご存知ですか?　三角関数の微分法は数学Ⅲで習います。ここでは三角関数の微分法を証明しながら、その証明に必要になる公式なども証明していきます。証明があまり厳密でないところがあるかもしれませんが、これを読んで数学に興味を持ってもらえるとうれしいです。

１．三角関数の導関数

三角関数の導関数を3つ紹介します。

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. $\left(\sin x\right)' = \cos x$　の証明

この導関数を証明するためには、「三角関数の加法定理」「三角関数の和積公式」「余弦定理」「三角関数の極限公式」が必要です。それぞれ、用いる場面が来たら証明します。

【$\left(\sin x\right)' = \cos x$の証明】

微分の定義により、

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

ここで、「三角関数の和積公式」を用います。

「三角関数の和積公式」

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \quad 、\quad \sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \quad 、$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \quad 、\quad \cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

これらを証明するために必要なのが、「三角関数の加法定理」です。

「三角関数の加法定理」

$\sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$　サインプラス、サインマイナス

$\cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$　コサインプラス、コサインマイナス

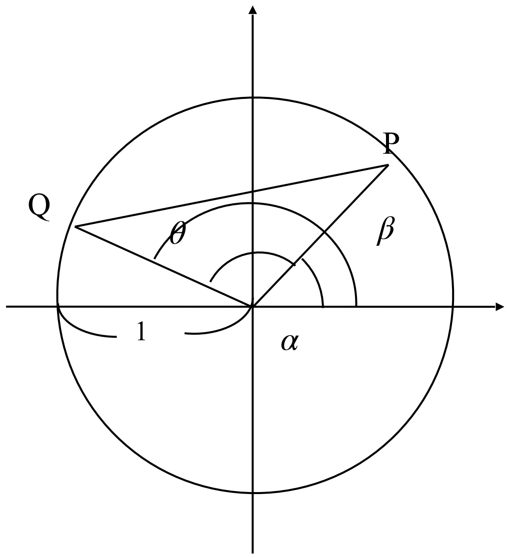
$\tan\left(\alpha \pm \beta\right) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$　タンジェントプラス、タンジェントマイナスと呼ぶことにします。

[1] 三角関数の加法定理の証明

コサインマイナスが証明できれば、残りの５つも証明できます。

【コサインマイナスの証明】

（右図）半径を1とします（単位円）。



$\mathrm{P}(\cos\alpha、\sin\alpha)$、$\mathrm{Q}(\cos\beta、\sin\beta)$とおくと、

$$\mathrm{PQ}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta$$
$$+\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

ここで、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$になることを用いると上の式は、

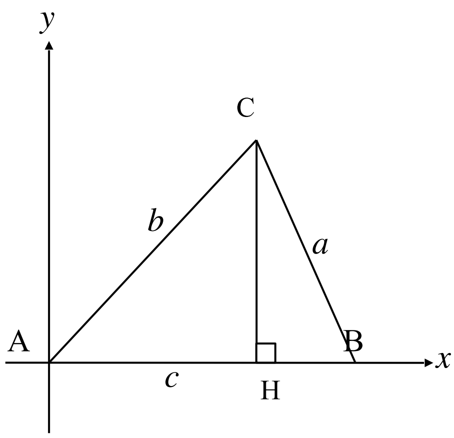
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

・・・①となります。

ここで、「余弦定理」を用います。

> 「余弦定理」
>
> 三角形ABCにおいて、
>
> $a = \mathrm{BC}$、$b = \mathrm{CA}$、$c = \mathrm{AB}$　とする。
>
> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\mathrm{A}$

[2] 余弦定理の証明



Cの座標は$(b\cos A, b\sin A)$となり、Cからx軸に対し、垂線を引いたときの交点をHとします。

三角形CHBに注目します。

$$a^2 = (c - b\cos\mathrm{A})^2 + (b\sin\mathrm{A})^2$$
$$= c^2 - 2bc \times \cos\mathrm{A} + b^2\cos^2\mathrm{A} + b^2\sin^2\mathrm{A}$$
$$= c^2 - 2bc \times \cos\mathrm{A} + b^2(\cos^2\mathrm{A} + \sin^2\mathrm{A})$$
$$= c^2 - 2bc \times \cos\mathrm{A} + b^2 \times 1$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\mathrm{A}$$

よって、　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\mathrm{A}$　■

これによって、

$\mathrm{PQ}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos\theta = 2 - 2\cos\theta$・・・②とします。

ここでα, βに対してθに対して、$\theta = \beta - \alpha$が成立します。また$\cos\theta = \cos(-\theta)$が成り立ちます。

①と②の式を比較すると、

$\mathrm{PQ}^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos\theta$

よって、$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$　■

これで、コサインマイナス以外の加法定理も証明できるようになりました。

【コサインプラスの証明】

コサインマイナスを利用すると、

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\{\alpha-(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

ここで、$\sin(-\theta)=-\sin\theta$、$\cos(-\theta)=\cos\theta$という公式を使うと上の式は、

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha(-\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

よって、$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ■

【サインマイナスの証明】

$\beta\to\beta+\dfrac{\pi}{2}$とし、コサインマイナスを用います。

$$\cos\left\{\alpha-\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\quad\cdot\cdot\cdot①$$

（$\cos\left\{\alpha-\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$は$\cos\left(\alpha-\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)$であり、単位円を書くと$\sin(\alpha-\beta)$と等しいことがわかります。）

ここで、$\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\theta$、$\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\mp\sin\theta$　（単位円を書くと納得できます。）

という公式を使うと式①は、

$$\begin{aligned}&\cos\alpha(-\sin\beta)+\sin\alpha\cos\beta\\&=-\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

よって、$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ■

【サインプラスの証明】

サインマイナスを利用すると、

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\{\alpha-(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)$$

ここで先ほどのように、$\sin(-\theta)=-\sin\theta$、$\cos(-\theta)=\cos\theta$　という公式を使うと上の式は、

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha(-\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

よって、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ■

【タンジェントプラスマイナス】

三角関数の相互関係により、

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}$　となります。ここで、$\sin(\alpha\pm\beta)$、$\cos(\alpha\pm\beta)$の加法定理で、

$$\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1\mp\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

（左の式の分母分子を$\cos\alpha\cos\beta$でわりました。）

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 \mp \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \quad = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

よって、$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$ ■

やっと加法定理が証明できました…。これから、「三角関数の和積公式」を証明します。
それぞれ加法定理を使って簡単に証明できます。

[3] 三角関数の和積公式の証明

【$\sin A + \sin B$の証明】

$A = \alpha + \beta$、$B = \alpha - \beta$ とします。（以下同じ）

$\sin A + \sin B = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

ここで加法定理を使って変形します。

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$= 2\sin\alpha\cos\beta \quad = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

（$\alpha = \dfrac{A+B}{2}$、$\beta = \dfrac{A-B}{2}$から。）

よって、$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ ■

【$\sin A - \sin B$の証明】

$$\begin{aligned}\sin A - \sin B &= \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= 2\cos\alpha\sin\beta \ = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

よって、$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ ■

【$\cos A + \cos B$の証明】

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

よって、$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ ■

【$\cos A - \cos B$の証明】

$$\begin{aligned}\cos A - \cos B &= \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= -2\sin\alpha\sin\beta \ = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

よって、$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ ■

これで「三角関数の和積公式」の証明は以上です。

$\sin x$の導関数の証明に戻りましょう。

$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\cos\left\{\frac{(x+h)+x}{2}\right\}\sin\left\{\frac{(x+h)-x}{2}\right\}}{h}$$

（$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$の和積の公式に、$A=x+h$、$B=x$を代入しました。）

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$ （分母分子を2でわりました。）

ここで、「三角関数の極限公式」を用います。

「三角関数の極限公式」
$\lim_{x\to0}\sin x=0$

[4]　三角関数の極限公式の証明

これは極限のイメージを説明したほうがわかりやすいと思うので、厳密な証明はしません。

$\lim_{x\to0}x$

このとき、xは限りなく0に近づきますが、0になるわけではなく、0.000…0001のようなとても小さな正の実数になります。

$\lim_{x\to0}\sin x$

このとき、xが限りなく0に近づくと、$\sin x$は限りなく0に近づくため、これもまた0.000…0001のようなとても小さな正の実数になります。

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

ここでxと$\sin x$は0に限りなく近づけると同じ速さで0に向かうので、$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$　∎

$$\lim_{h\to0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x\times1=\cos x$$

よって、$(\sin x)'=\cos x$　∎

長くなってしまいましたが、これで、$(\sin x)'=\cos x$　が証明されました。

よかったら、次の$\cos x$、$\tan x$の導関数の証明も読んでください。

3．$(\cos x)'=-\sin x$　の証明

【$(\cos x)'=-\sin x$の証明】

微分の定義により、

$$(\cos x)'=\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$の和積の公式に、$A=x+h$、$B=x$　を代入します。

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left\{\frac{(x+h)+x}{2}\right\}\sin\left\{\frac{(x+h)-x}{2}\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$ （分母分子を2でわりました。）

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\sin(x+h)\times\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}=-\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

ここで「極限公式」を用います。

$-\sin x\times 1=-\sin x$よって、$(\cos x)'=-\sin x$ ∎

4．$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$　の証明

【$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$の証明】

微分の定義により、

$$(\tan x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}$$ （分母分子に$\cos(x+h)\cos x$をかけました。）

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$の加法定理の公式に、$\alpha=x+h$、$\beta=x$　を代入します。

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\{(x+h)-x\}}{h\cos(x+h)\cos x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

ここで「極限公式」を用います。

$$1\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}=1\times\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

よって、$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ∎

これで「三角関数の微分法の証明」はおわりです。初めての部誌作りだったので、とても大変でしたが、この機会に三角関数についていろいろなことが学べましたし、改めて数学の楽しさを感じることもできました。皆さんにも数学の楽しさを感じていただけたなら、とても幸いです。読んでいただき有難うございました。

第３章

バーゼル問題

中等部１年　＊＊＊＊＊＊

1.はじめに

皆さんは有名な数学者の名前を三人挙げて下さいと言われたら誰をあげるでしょうか。
フェルマー、ピタゴラス、ガウス、ニュートンなどがおそらく挙がるだろうと思いますが、同じように多く挙げられるであろう人に、レオンハルト・オイラーがいます。

オイラーは生涯でたくさんの有名な公式を残しています。有名なものだと、「世界一美しい数式」と言われるオイラーの公式（$e^{i\pi}+1=0$）や、一筆書きについての業績であるオイラー路、また関数を現在のように$y=f(x)$で表したのもオイラーで、その研究は多岐にわたります。なんとマイナスの範囲を含めた数直線を書いたのもオイラーです。昔、スイスの紙幣にもなったこともあります。彼抜きでは数学史は語れないと言っても過言ではありません。

オイラーは整数論についても数多くの業績を残しています。その一つがバーゼル問題です。当時の超難問だったこの問題を、オイラーは初めて証明しました。その答えはとても美しいことで知られています。

私は初等部三年生の時、担任の先生にある数学の本を紹介してもらいました（参考文献1）。
その本でバーゼル問題を知り美しさと不思議さに感動し、自分でも証明を追ってみたいと考えていました。中学生になった今、ようやく自分の知識が追い付いてきたので今回はこの問題の証明の流れを追ってみたいと思います。

2.バーゼル問題とは

バーゼル問題とは、下のような形をしています。Σを使って、右のようにも表せます。

［問］次の値を求めよ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}\ \cdots$	［問］次の無限級数が収束するなら、その値を求め、収束しないのであればそのことを証明せよ $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}$

この問題を証明するための流れを以下に示します。

①$\sin x$の「和」の形（テイラー展開）　②$\sin x$を“因数分解”

↓　　↓

③$\frac{\sin x}{x}$の「和」の形　＝　④$\frac{\sin x}{x}$の「積」の形

↓

⑤x^2を含む項の係数比較

↓

バーゼル問題の答え

3.予備知識
この問題を証明するにあたって必要な、３つの予備知識を説明します。

3.1. 代数学の基本定理
代数学の基本定理は方程式にまつわる定理で、
「係数が複素数のn次方程式はn個の複素数解を持つ。ただし重解は多重度も含めて数える」
というものです。
これは簡単に言えば、二次方程式は二個の解を持ち、五次方程式は五個の解を持つ、という事です。

3.2.方程式の因数分解
n次方程式は、n次の項から定数項(0次の項)までの和で表されています。
これを、掛け算の積で表すのが「因数分解」です。代数学の基本定理よりn次方程式の解はn個あるので、それを$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$とします。
すると、n次方程式は
$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)=0$
と因数分解出来ます(aはn次の項の係数)。

3.3.$\sin x$のテイラー展開
$\sin x$は関数の一種です。この関数は、無限次の多項式でも表せます。
$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\cdots$$
これをテイラー展開と言います。

4.バーゼル問題の証明
①のテイラー展開から始めます。
$\sin x$は、無限次の多項式でも表せるので、
$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\cdots$$
ここで、$x \neq 0$とし、両辺をxで割ります。
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}\cdots \Rightarrow ②$$

$\frac{\sin x}{x}$を”和”の形で表せました。
そして次に、③の
$\sin x = 0$を因数分解しようと思います。
$\sin x = 0$という方程式を満たすxは
$x = n\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots)$と表せます。
これを使えば$\sin x$も”因数分解”出来そうです。

先ほど説明した因数分解のルールに則れば、
$\sin x = x(x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi)\cdots$という式が成り立ちそうですが、ここでは

$$\sin x = x\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots \Rightarrow ③$$

という式を用います。理由は後で説明します。
③の式のxに$n\pi$を代入してみると、nにどんな整数を入れたとしても必ず$\sin x = 0$が成り立つことが分かります。

そして③を、$x \neq 0$として両辺をxで割ります。

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots \Rightarrow ④$$

②と④は、同じ$\dfrac{\sin x}{x}$を違う形で表しただけなので、
②=④が成り立ちます。

$$\frac{1}{1!}-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}\cdots = \left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots \Rightarrow ⑤$$

⑤の「x^2を含む項の係数比較」は、「x^2が含まれている項の係数を、左辺と右辺で等しいとして比べること」です。
その為に、④の一部を展開してx^2が含まれる項の係数を調べます。

$$\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots = \left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots \Rightarrow ④'$$

④′をわかりやすくするために、

$$a = -\frac{1}{1^2\pi^2},\ b = -\frac{1}{2^2\pi^2},\ c = -\frac{1}{3^2\pi^2},\ d = -\frac{1}{4^2\pi^2}\cdots$$

と置きます。すると、

$$(1+ax^2)(1+bx^2)(1+cx^2)(1+dx^2)\cdots$$
$$=\{1+(a+b)x^2+abx^4\}(1+cx^2)(1+dx^2)\cdots$$
$$=\{1+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x^4+abcx^6\}(1+dx^2)\cdots$$
$$=\{1+(a+b+c+d)x^2+(ab+bc+cd+da+ac+bd)x^4+(abc+abd+acd+bcd)x^6+abcdx^8\}\cdots$$

このx^2の部分は、展開を進めると$(a+b+c+d+\cdots)x^2$となります。

従ってx^2の係数は$-\dfrac{1}{1^2\pi^2}-\dfrac{1}{2^2\pi^2}-\dfrac{1}{3^2\pi^2}-\dfrac{1}{4^2\pi^2}\cdots$となります。

②のx^2を含む項の係数は$-\dfrac{1}{3!}$

②=④より、②のx^2を含む項の係数と④のx^2を含む項の係数も等しいので、次のことが言えます。

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{1^2\pi^2}-\frac{1}{2^2\pi^2}-\frac{1}{3^2\pi^2}-\frac{1}{4^2\pi^2}\cdots \quad \Rightarrow ⑤$$

両辺に$-\pi^2$をかけて

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

以上より、求める答えは$\frac{\pi^2}{6}$となります。

証明は終わりですが、③での因数分解がなぜ

$\sin x = x(x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi)\cdots$ではいけなかったのか説明します。

この証明では⑤の係数比較をすることがわかっています。
係数比較では、一般的な方程式同士ならば一番次数の高い項の係数を合わせてから比較します。
いわば方程式のスケールを合わせて比べるわけです。
しかし、無限個の積ならば、一番次数の高い項の係数はわかりません。
そこで、一番次数の低い定数項を作って揃えることで、スケール合わせをします。
その為、③を使えば定数項は1だとわかっているので、安心して係数比較が出来ます。

5.終わりに

今の証明はかなり厳密さを無視しているところが多くあります。$\sin x$のテイラー展開や因数分解が正しいかどうか証明していないので、気になる人は調べてみてください。
$\sin x$という、一見全く関係なさそうな分野からバーゼル問題が解ける驚きや、自然数の逆二乗和からπが出てくる不思議さを感じていただけたら嬉しいです。
初めての部誌づくりなので不十分かと思いますが、最後まで読んで頂き、ありがとうございました。

6.参考文献

1.中島さち子,人生を変える「数学」そして「音楽」教科書には載っていない絶妙な関係,講談社,2012
2.結城 浩,数学ガール,SBクリエイティブ,2007第４部

第４章

正多角形と正多面体

中等部２年　＊＊＊＊＊＊

はじめに

本日は，数学研究同好会ブースにご来場いただき,またこの部誌を手に取ってくださりありがとうございます。

私は，主に小中学生向けに正多角形と正多面体という，有名なテーマでお話ししようと思います(何のひねりもないテーマともいえますが…)。若干(というか結構)，説明等が雑になってしまうかもしれませんが，暖かく読んでいただけたら幸いです。

1. 定義

正多角形：すべての辺の長さが等しく，各頂点における角の大きさが全て等しい多角形のことを，正多角形という。

正多面体：すべての面が正多角形で，どの頂点にも同じ数の面が集まるへこみのない多面体のことを，正多面体という。

2. 正多角形の性質

i. 正三角形

正多角形といわれてまず多くの方が思い浮かべるのがこの正三角形でしょう。正三角形は，重心，垂心，内心，外心すべてが一致する唯一の三角形です。重心とかわからないよ！って方は検索することをお勧めします。では，なぜ一致するのでしょうか。二等辺三角形において，次の定理が成り立ちます。

[定理]二等辺三角形において，頂角の二等分線，頂点から底辺にひいた中線・垂線，底辺の垂直二等分線は，すべて一致する。

正三角形は，どの角も頂角ですので，頂角の二等分線，頂点から底辺にひいた中線・垂線，底辺の垂直二等分線は，すべて一致します。当然，それらの交点も一致します。すっごい雑ですがこういう理由です。

ちなみに，デュードニー分割というのがあり，これに従って正三角形を分割し，うまく並べると正方形を作ることができます。

ii. 正方形

さて，正三角形に続いて正方形…といくはずだったのですが，正方形に関するもので，私の持っているネタがないことに気づきました。私の勉強不足です。申し訳ありません。ということなので正方形に関する問題を1問出題します。結構面白い問題だと思うので，解いてみてはいかがでしょうか。解答は最後に書いてあります。では問題！

Q.1　正方形を2回折って，正方形のいずれかの辺を三等分する点を1つ見つける方法を述べてください。

iii. 正五角形

正五角形を見て，小中学生の方が真っ先に考えることといえば，「正五角形のなかのあの正五角形はどれぐらいの面積なんだろう?」だと思います(多分)。結論から言うと，$\sqrt{}$を使わないと求められません。しかし，そうすると小学生の方は分からずじまいで終わってしまうので，感覚だけでもつかんでいただこうと思います。

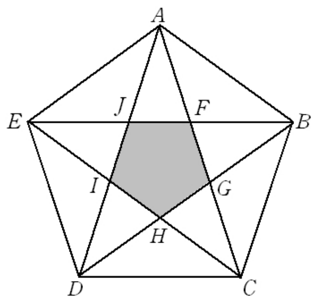


図１の△ＡＥＢの面積は，△ＡＥＪ２つ分と，△ＡＪＦの面積の合計です。△ＥＨＢと△ＡＥＢは合同です。ここで，△ＡＥＪの面積をS，△ＡＪＦの面積をTとすると，正五角形ＦＧHIＪの面積は，2S＋T−2T＝2S−Tと表せます。と表せます。ちなみに，正五角形ＡＢＣＤＥの面積は，7S＋4Tとなります。

さて，ここからは$\sqrt{}$を使ってもっと正確に求めていきます。

△ＡＣＤ∽△ＣＩＤであるので，ＡＤ：ＣＤ＝ＣＤ：ＩＤ　ＡＤ＝X，CD＝1とすると

X：1＝1：(X−1)　$X^2 - X - 1 = 0$　よって$X = \dfrac{(-1)^2 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$X > 0$であるから$X = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$　つまりＡＤ＝$\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

ＩＤ＝ＡＤ−ＤＩであり，ＡＥ＝ＡＩであるから，

ＩＤ＝$\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$　また，ＡＪ＝ＩＤであるからＡＪ＝$\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

よってＩＪ＝ＡＤ−(ＡＪ＋ＩＤ)＝$\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} - \left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

正五角形ＦＧHIＪと正五角形ＡＢＣＤＥの相似比は，$1 : \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} = 2 : 3 - \sqrt{5}$

よって面積比は$2 : 7 - 3\sqrt{5}$。

つまり正五角形FGHIJの面積は正五角形ABCDEの$\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$倍の面積ということになります。

実は，正五角形の一辺の長さと対角線の長さの比(1：$\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$)は黄金比(約1:1.618)になっています。

iv. 正六角形

正六角形は，合同な正三角形に分割できます。単位円に内接する正六角形は周の長さが6です。

このとき，正六角形の周は円周より短いので古代より円周率が3以上である証明に用いられてきました。平面を敷き詰めることのできる正多角形のうち，もっとも頂点の多い正多角形でもあります。(他は平面を敷き詰めることのできる正多角形のうち，もっとも頂点の多い正多角形でもあります。(他は正三角形，正方形)

v. 正十二角形

正十二角形も，正六角形のように円周率が3以上であることを証明できます。単位円に内接する正十二角形の面積は,3になります。(底辺が1,高さが$\dfrac{1}{2}$の三角形が12個あるので)円の面積は当然πですから，π＞3が成り立ちます。これで正多角形については終わりです。正多角形好きの皆様,ごめんなさい。でも，正多面体の話の中にも正多角形ちょっと出てきたりするのでどうか最後までお付き合いください。

3. 正多面体の性質

i. 正四面体　正三角形4枚の，とてもシンプルな正多面体です。正四面体を切断すると，後述する正八面体や切頂四面体が作れます。

ii. 立方体(正六面体)

最も知られている正多面体と言っていいでしょう。正方形6枚からなる正多面体です。立方体を切断して，様々な立体を作ることができます。正四面体をつくることもできます。ちなみに，たとえば立方体ＡＢＣＤ-ＥＦＧＨ3点Ｂ，Ｄ，Ｅを通る平面で立方体を切断したときの切断面の正三角形の重心は，点Ａと立方体の重心を通る直線上にあります。というか，3点Ｂ，Ｄ，Ｅを通る平面に平行な切断面ならすべて重心は点Ａと立方体の重心を通る直線上にあります。また，立方体の各面の重心をとると，これらを頂点とする正八面体ができます。

iii. 正八面体

正三角形8枚からなる正多面体です。一辺の長さが等しい正四面体との体積比は2:1です。なんと(？)立方体を切断して正四面体を作り，その正四面体を切断して正八面体を作り，そしてその正八面体の各面の重心を結んで立方体を作り…ということができるんです。そろそろ長い文章に飽きた…というかたもいらっしゃいそうなのでもう1回問題を出します。解答も同じく最後に書いてあります。

Q.2　1辺が5ｃｍの正八面体があります。この正八面体を壁にあいている4.9×4.9cmの穴に通してください。ただし，正八面体が壁に触れてはいけません。

正十二面体・正二十面体は割愛します，ごめんなさい。どういう立体か説明しておくと，正十二面体は正五角形12枚からなる立体，正二十面体は正三角形20枚からなる立体です。

iv. なぜ正多面体は5種類しかないのか

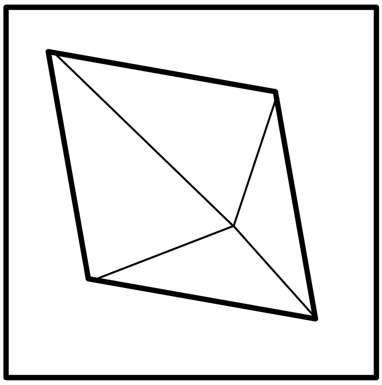
正多面体はこの5種類しかありません。　なぜこの5種類しかないのか。正多面体の一つの頂点には，3つ以上の面が集まっています。そして，1つの頂点に集まる角の和は360°未満になります。従って，各面が正三角形である正多面体は正四面体(1つの頂点に3つの面)，正八面体((1つの頂点に4つの面)，正二十面体(1つの頂点に5つの面)だけになります。同様に，各面が正方形，正五角形である正多面体はそれぞれ立方体，正十二面体のみになります。各面が正六角形である正多面体を作ろうとすると，3つの面が集まった時点で1つの頂点に集まる角の和は360°になってしまい，作ることができません。よって，正多面体は5種類しか作ることができないのです。

v. 準正多面体

① 各面が正多角形で構成されていて(正多角形は何種類でもよい)，②各点を構成する正多角形の種類と個数が同じであり，へこみのない立体である正多面体でない立体を準正多面体と言います。準正多面体には，以下のようなものがあります。

例：切頂四面体，切頂六面体，切頂八面体，切頂十二面体，切頂二十面体，立方八面体，
斜立方八面体，ねじれ立方体，ねじれ十二面体

４．問題の解答と解説



Q.1　１回目：横に半分に折る。２回目:右下の頂点が上の辺と１回目のときについた折り目との交点に付くように折る。　(このとき左の辺と折られた下の辺との交点が３等分する点です。)

※ちなみに，交点と左上の頂点，上の辺の中点で作られる直角三角形は３:４:５の直角三角形です。

Q.2右図の通りに通します。

５．最後に

正多角形と正多面体にはこんな性質や面白さがあるんだと，今回みなさまに伝えることができたでしょうか。私もまだまだ勉強中で，間違った部分もあるかもしれませんが，どうか暖かく見逃していただけたらと思います。正多角形と正多面体について調べる中で，新たな発見や驚きがありました。そして楽しさを味わうことができました。身近にある様々なものにも，数学が隠れていたりします。気づきや発見から始まる数学，算数の楽しさを，ぜひ１度は感じてほしいなあと思います。一生に１回ぐらい経験しないと，いやもっと経験しないと損ですよ！(何様)最後まで読んでくださった方も，ちょっとだけの方も，読んでくださりありがとうございました！

参考文献

数研出版　体系数学１ チャート幾何編
数研出版　体系数学２ 問題集幾何編

第５章

ベンフォードの法則

高等部１年　＊＊＊＊＊＊

・法則の概要

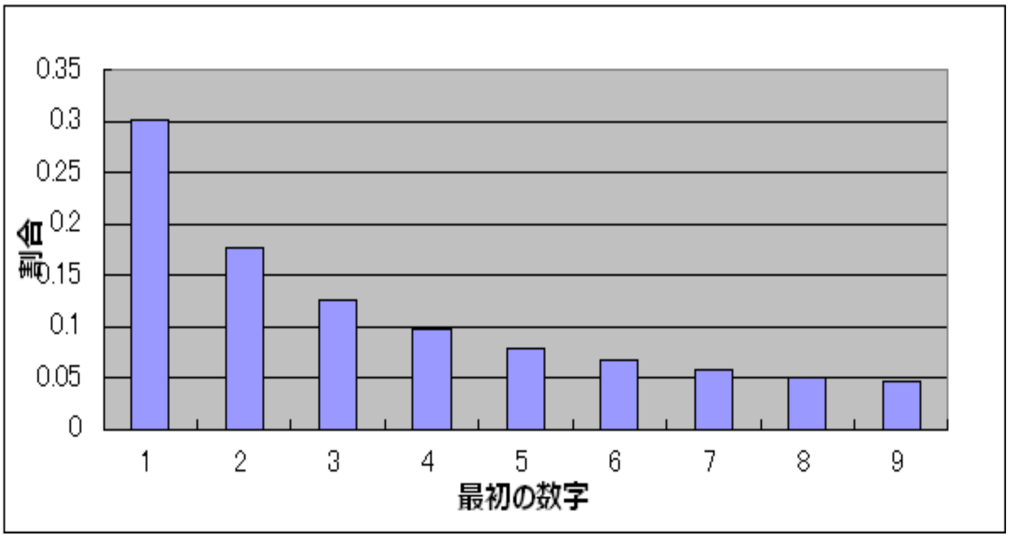
世の中では、長さや重さ、金額、番号など数字で表す機会が多々ある。それらは0から9までの数の組み合わせで作られているが、それらの先頭の数字（ex.12なら先頭の数字は1、0.89なら8）を様々な分野の数字からランダムに集めたら、それぞれの数字の割合はどうなるだろうか。番号などで0から始まる場合は0を無視して（ex.0024は24として扱う）0は先頭の数字に来ないと考えると、1～9の数字が均等に出るからそれぞれ約11.1％で同じだと思うかもしれない。

しかし、ベンフォードの法則ではそれが1の割合が約30.1％で最も多いというのだ。詳しく言うと、Nを1から9までのいずれかの整数とおくと先頭の数字がNになる確率は

$\log_{10}\dfrac{N+1}{N}$ $\left(=\log_{10}(N+1)-\log_{10}N\right)$ となる。下はこの割合を表とグラフにしたものである。

表１

最初の数字	割合
1	0.301
2	0.176
3	0.125
4	0.097
5	0.079
6	0.067
7	0.058
8	0.051
9	0.046



グラフ2

・成り立つもの

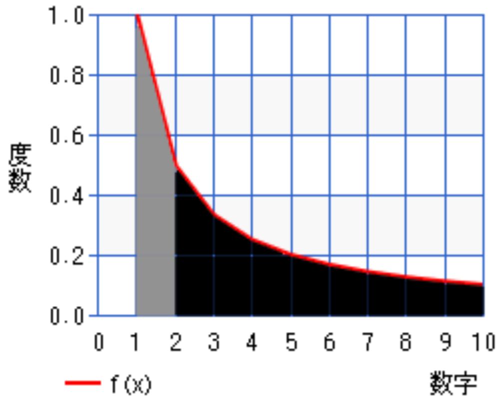
川の長さのように偶然的に発生したもので大小さまざまある数値や、順位などの番号、2^n などの指数関数的な増加をする数列など様々な分野で成り立つ。但し身長体重のような数値ごとのばらつきの少ないものや、テストの点のように上限があるものは成り立たないことがある。また法則が成り立つようなときも割合の偏りは法則に比べ少ない時もあれば多い時もある。

・証明

大まかに理解してもらうためにここでは簡単な説明を二つする。

①　川の長さが1000～1100ｋｍのものよりも100～200ｋｍのものの方が個数が多いように、自然に発生したものの大きさと個数の多さは大まかに反比例することが多い。

グラフで表すと大体このようになる。一桁の数のみ考えた時、Nを1から9までのいずれかの整数とおくと、先頭の数字がNになるのはN以上$N+1$未満なので、その部分の度数に当たる$x=N$、$x=N+1$、ｘ軸、y=f(x)で囲まれた図形の面積（例えば１の時はグラフの灰の部分）は、



$$\int_N^{N+1}\frac{1}{x}dx=\left[\log x\right]_N^{N+1}=\log N+1-\log N=\log\frac{N+1}{N}$$

また１〜９までの全体の度数に当たるｘ＝１、ｘ＝１０、　ｘ軸、ｙ＝ｆ(x)で囲まれた図形の面積（灰と黒）は

$$\int_1^{10}\frac{1}{x}dx=\left[\log x\right]_1^{10}=\log 10$$

で、先頭の数字がＮになる割合は「先頭の数字がNの度数（面積）÷全体の度数（面積）」より、

$$\frac{\log\frac{N+1}{N}}{\log 10}=\log_{10}\frac{N+1}{N}$$

となり、ベンフォードの法則が成り立つ。
対数が分からない方のために説明すると、グラフ２において面積が大きいものほど個数が多いため１や２の方が８や９よりも多いといえ、計算するとそれぞれの割合が表１になるということである。

②　今度は会員番号について考えてみる。多くの会は入会した順に1番、2番、3番…と番号が割り当てられる。また、世の中には様々な会があり、人数も多いのから少ないのまで様々である。それを踏まえて、

Ⅰ、10個の会があるとして、会員数は、1つ目の会は1人、2つ目の会は2人、…として、10個目の会が10人になるように順番に設定する。会員数と先頭の数字の人数ごとに表にしてそれぞれの数を実際に計算してみる。（表中の単位は人）また、「割合」は10個の会全体の合計に対する割合を示す。

		先頭の数字								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
会員数	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	4	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	5	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	6	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	7	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	8	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	10	2	1	1	1	1	1	1	1	1
計		11	9	8	7	6	5	4	3	2
割合		0.200	0.164	0.145	0.127	0.109	0.091	0.073	0.055	0.036

1や2の人数が8や9よりも多くベンフォードの法則の割合に近いが、それでも端の1や9は法則の割合よりも少なく、真ん中の4や5は法則の割合よりも多い。

II、こんどは20個の会があるとして、会員数はそれぞれ1人、2人、…20人とする。
同様に表を作る。

これもベンフォードの法則の割合に近いが、今回はⅠとは逆で端は法則の割合よりも多く、真ん中は法則の割合よりも少ない。

Ⅰ やⅡのようなことを人数を様々に設定して多数やり、それらの値を平均するとベンフォードの法則の割合に近づく。この説明は順位や住所の番地などにも使うことができる。

		先頭の数字								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
会員数	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	4	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	5	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	6	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	7	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	8	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	10	2	1	1	1	1	1	1	1	1
	11	3	1	1	1	1	1	1	1	1
	12	4	1	1	1	1	1	1	1	1
	13	5	1	1	1	1	1	1	1	1
	14	6	1	1	1	1	1	1	1	1
	15	7	1	1	1	1	1	1	1	1
	16	8	1	1	1	1	1	1	1	1
	17	9	1	1	1	1	1	1	1	1
	18	10	1	1	1	1	1	1	1	1
	19	11	1	1	1	1	1	1	1	1
	20	11	2	1	1	1	1	1	1	1
計		85	20	18	17	16	15	14	13	12
割合		0.405	0.095	0.086	0.081	0.076	0.071	0.067	0.062	0.057

・法則の応用

ベンフォードの法則が使える実用例として、会計監査がある。問題ない会計ならばその中にある数字でベンフォードの法則が成り立つはずだが、逆に言えばそれが成り立たないならそれは改ざんされた問題のある会計である可能性が高いということだ。同様の理由で選挙の不正を発見するのにも使える。

出典：ビジュアル数学全史ー人類誕生前から多次元宇宙まで　クリフォード・ビックオーバー著
根上生也　水原文訳

https://www.naganomathblog.com/entry/2018/06/02/160224
【ベンフォードの法則】不正を暴く「1」の法則：先頭の数字として最も多いのは何？

第６章

１＋１＝２は本当に正しいのか？

高等部1年　＊＊＊＊＊＊

はじめに

１＋１、もちろん答えは２です。そんなの当たり前だろと、思われた方もいるでしょう。しかし、本当に１＋１の答えは２なのでしょうか？というわけで、この謎を一緒に解いていきましょう。

証明

この証明にはペアノの公理というものを使います。

ペアノの公理

自然数は次の５条件を満たす。

(1)　自然数０が存在する。

(2)　任意の自然数aにはその後者suc(a)が存在する。(suc(a)はa + 1の意味)

(3)　０はいかなる自然数の後者でもない。（０より前の自然数は存在しない）

(4)　異なる自然数は異なる後者を持つ。$a \neq b$のとき$suc(a) \neq suc(b)$となる

(5)　０がある性質を満たし、aがある性質を満たせばその後者　suc(a)もその性質を満たすとき、すべての自然数はその性質を満たす。

これを満たす自然数に対して足し算を次のように定義します。

(1)　すべての自然数aに対して、$a + 0 = a$

(2)　すべての自然数a、bに対して、$a + suc(b) = suc(a + b)$

ここからは計算していきましょう。

$$suc(0) = 1、suc(suc(0)) = 2$$

と定義します。

$a = suc(0)$、$b = 0$として、

$a + suc(b) = suc(a + b)$に代入すると、

$$\begin{aligned} suc(0) + suc(0) &= suc(suc(0) + 0) \\ &= suc(suc(0)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

以上で証明は終わりとなります。

おわりに

どうでしたか？1 + 1という小学一年生でもできる問題も、ここまで深めることで詳しく求めることが出来ます。このような基本的なこともより深く調べてみてもおもしろいかもしれませんね。

第7章

0から始める積分

高等部１年　＊＊＊＊＊＊

☆注意…ネタ枠です

☆はじめに

みなさんこんにちは。部誌を書くのが初めての高一の＊＊＊です。自己紹介は以上です。

今回は何をするのかというと、タイトル通り「０から積分」を学びます。それだけです。**細かいことや深いことはすべて省略して**、基本の計算のみ解説（解説というほどしっかりとはやりません）します。そのため、この文章の対象は、「積分？聞いたことあるけど知らないから勉強するか。」みたいな方、最低限度の労力で「俺、積分できるぜ！」と自慢したい方、「夏休み遊んでいたから脳が動かないや。仕方ないから勉強するか。」みたいな方、「脳のトレーニングをしたいから問題だけ解くか。」みたいな方、「急に積分したくなってきた！」という方々向けです。

第０節

積分をする前に、「微分」を理解しなければなりません。ですが、メインは積分なので省いて、重要な式のみ書きます。手抜きではないです（震）

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

数式アレルギーの方に説明すると、「累乗の数をxにかけて、累乗の数から１引く」ということです。( ) $'$は、「中身を微分します」という記号です。よく出てくる例をまとめます。

$x' = 1$

xはxの１乗ですので、先程の公式に$n = 1$でそのまま当てはめます。ちなみに０乗は１です。説明はグーグル先生がしてくれます。

$(x^2)' = 2x$、　$(x^3)' = 3x^2$

というように、実際の式を見れば理解しやすいですね。ちなみに、**定数を微分すると０になる**、と思っておいてください。

では微分は終わりです。全国の微分ファンの方々、こんなに早く終わってしまって申し訳ありません。

第１節

積分を簡潔にまとめると、「微分の逆」です。$2x$を積分するとx^2になると考えれば大丈夫です。いきなり積分する前に、練習だと思って、$\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x} + 1$　と、$\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x} - 1$　と、$\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x} + 3$ を微分してみてください。積分ではなく微分です。

①　$(\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x} + 1)' = 2\boldsymbol{x} + 3$　②　$\left(\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x} - 1\right)' = 2\boldsymbol{x} + 3$　③　$\left(\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x} + 3\right)' = 2\boldsymbol{x} + 3$

実は三つとも答えが一緒になります。さきほど、「積分は微分の逆」と言いました。つまり、微分した答えを積分すればさっきの３つの式のどれかになるはずです。しかし、三つも候補があると積分の答えが絞れません。困ったところに救世主がやってきます。そこで現れるのが、**積分定数C**です。積分したあとの式にこの**C**をつければ、ほかの式にもなる可能性があるというサイン的な役割を果たしてくれるので、答えは絞れなくても問題ないのです。

それでは、ついに積分本番です。積分には２種類あって、不定積分と定積分があります。まずは不定積分から。

$F'(x)=f(x)$のとき、$\int f(x)dx=F(x)+C$

意味わからないですよね。解説します。$F(x)$というのは、xの関数という意味です。$F'(x)$は、その関数の式を微分したもの。それを$f(x)$とします。「$\int$」この記号は「積分」または「インテグラル」と読みます。後ろのdxを含め、「$\int dx$」で積分する記号となっています。

まとめると、「$\int$（微分した式）dx＝（微分する前の式）+積分定数C」が不定積分の式となっています。実際に解いてみると早いかもしれません。というわけで練習問題です。

① $\int x\,dx$　② $\int x^2dx$　③ $\int 4x^2$　④ $\int\left(x^2+x\right)dx$

解答

① $\frac{1}{2}x^2+C$　② $\frac{1}{3}x^3+C$　③ $\frac{4}{3}x^3+C$　④ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

白チャートの不定積分の最初の問題なので簡単だったかと思います。
ここからは、少し公式を紹介しますので、徐々に計算問題を解けるようにしていきましょう。

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$　② $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

上の公式は、例えば、$2(x^2+3x+2)$の式を積分するとき、（）の中身だけ先に計算して、最後の答えに（）の外にある2をかけても答えが変わらないというものです。ただし、kは0ではない定数です。
下の公式は、二つの式があったら、それぞれ積分してからあとで足したり引いたりすれば、答えは変わらないというものです。
ただ、どちらも使う機会が少ないかもしれませんが、練習問題を１つ紹介しておきます。

問　$\int x^2(2x+1)dx-\int 2x\left(x^2-x+1\right)dx$

解き方のコツは、②の公式を逆に使い、１つの式にまとめて計算することです。

$$\text{（与式）}=\int\left(x^2(2x+1)-2x\left(x^2-x+1\right)\right)dx=\int\left(2x^3+x^2-2x^3+2x^2-2x\right)dx$$
$$=\int\left(3x^2-2x\right)dx=3\int x^2dx-2\int x\,dx=3\times\frac{1}{3}x^3-2\times\frac{1}{2}x^2+\mathrm{C}=x^3-x^2+C$$

不定積分は以上です。自分で数を決めてみたりして是非練習してみてください。

第２節

「不定積分」と繰り返してきましたが、なぜ「不」がくっついているのか、と思いませんでしたか？安心してください、「定積分」もあります。
「不定積分は文字ばっかりで面倒くさい」という誰かの心の声が聞こえてきました。だったら、定積分をしていきましょう。
まず公式の確認です。

$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$　（ただし、$F'(x)=f(x)$）　（aとbの大小関係は自由）

この公式で何ができるかというと、曲線のグラフの面積が分かったりします。おそらく普通の人の日常生活では使いません。

意義や目的はさておき、この公式を具体的に解説していきます。

「数式がある→積分する（ここは不定積分と同じ感じで計算するだけ、Ｃがいなくなるのが不定積分との差）→bとaをその式に入れて、bを代入した式からaを代入した式を引く」

という流れです。Ｃがいなくなる理由は、$F(b)$の式でも$F(a)$の式でもＣが出てくるため、引けば０になるからです。細かい話はややこしくなるので全部カットです。

とにかく実際にやってみましょう。

$$\int_1^3 3x^2 dx = [x^3]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$$

というように、具体的な数字が出るのが定積分です。

こちらは公式が少ないので使いそうな１つだけ紹介しておきます。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

要するに、途中で区切っても大丈夫、ということです。

次のページに練習問題をいくつか羅列します。

①$\int_{-1}^{2}\left(2x^2 - x + 3\right)dx$　②$\int_1^4 (x-3)(x-2)dx$　③$\int_{-3}^{3}(x+1)(2x-3)$

解答

①$\dfrac{27}{2}$　②$\dfrac{3}{2}$　③18

実は、③のなかで、$\int_{-a}^{a} x^{奇数}dx = 0$　という公式もさらっと登場するのですが、余裕があったら覚えると楽になるかもしれません。

第３節(おまけ)

ここまでくれば、基本的な積分はできるようになりました。

唐突ですが、YouTubeの動画に「１万マス積分」というのがあるのはご存じでしょうか。意外とやってみたいと思った方も多いのではないでしょうか。ですが、流石に１万マスは気が狂うので減らして、２５マスにします。あとがきの後に掲載しておくので、ぜひチャレンジしてみてください。５×５ならまだやる気も出るのではないでしょうか。または、友達とタイムアタック的な遊び方もありかもしれません。

あとがき

25マス積分を最後に入れたいので、先にあとがきを書かせていただきます。

数式打ち込むのが途中で面倒すぎて嫌になったりしたのは内緒です。Wordで数式打ち込んだことがある人はおそらくとても少ないのでは。専門ソフトを使うほど数式に詳しくないのでWordを使っています。

積分ガチ勢の方、高度なレベルを期待していた方は申し訳ありません。少なくとも私は基礎のレベルですのでご勘弁ください。

それでは最後まで読んでくれた方も、どうでもいいからといって飛ばした方もありがとうございました。少しでも記憶に残ったのなら幸いです。

遊び方…上の式と左の式をくっつけて計算します。例えば、一番左上のマスは$\int(2x+1)dx$となります。

	$\int(2x$	$\int(3x^2$	$\int_1^2(2x$	$\int_2^3(3x^2$	$\int_1^4(4x^3$
$+1)dx$	①	⑥	⑪	⑯	㉑
$+2x)dx$	②	⑦	⑫	⑰	㉒
$+6x^2)dx$	③	⑧	⑬	⑱	㉓
$+4x^3)dx$	④	⑨	⑭	⑲	㉔
$+4x+9x^2)dx$	⑤	⑩	⑮	⑳	㉕

解答　**（できる限り正確に解いたつもりでしたが間違っている可能性があります。訂正はセルフサービスでお願いします。）**

①x^2+x　②$2x^2$　③$2x^3+x^2$　④x^4+x^2　⑤$3x^3+3x^2$

⑥x^3+x　⑦x^3+x^2　⑧$3x^3$　⑨x^4+x^3　⑩$4x^3+2x^2$

⑪4　⑫6　⑬17　⑭18　⑮30

⑯20　⑰24　⑱57　⑲84　⑳86

㉑258　㉒270　㉓381　㉔510　㉕474

第８章

三次方程式の解の公式を出せるようになろう！

高等部２年　＊＊＊＊＊＊

はじめに

まず，この数学研究同好会の部誌を手に取ってくださりありがとうございます．昨年のいなほ祭では数研の部誌がなんと印刷分全て配布することができました．これは昨年数研の部誌を手に取って頂いた方のおかげです．ありがとうございました．私たち数研部員も精一杯活動していきますのでこれからの活躍にご期待ください！

１．三次方程式の解の公式を覚えたら方程式に関して右に出る者はいなくなる説

数学を学んでいる中学生，高校生の人たちは方程式を解いているときこのように思ったことはないだろうか．

「この方程式因数分解できない〜〜〜！」と．

このようなときは２次方程式の場合は解の公式を使ったり，３次以上の場合は因数定理などを使って解いたりする．しかし因数定理はxについて何度も数字を代入し，その都度式の値を計算しなければならない．それはとても面倒なので３次方程式の解の公式を知れば悩んだりすることがなくなる．また，もし因数定理でも解けないような問題と遭遇した場合，それだけでは対応できなくなってしまうので，三次方程式の解の公式とその導出法を示そうと思う．

２．公式を導く前に

公式を導く前に知っておいてほしい事柄が２つあるので覚えておいてほしい．

(1) n次方程式の解の個数は（複素数の範囲で，重複を含めて）ちょうどn個である．

・・・代数学の基本定理

(2)$x^3 = a$の解は$x = \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}\omega, \sqrt[3]{a}\omega^2$

ωは$x^3 = 1$の虚数解の一つです．

それぞれ証明は省きます．

３．解の公式を導いてみよう！

では，実際に解の公式を導いてみよう．$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$とする．

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

両辺をaで割って　$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

ここで$x = y - \frac{b}{3a}$　…①として式に代入すると

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

計算すると，$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$

よって$y^3 + \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2} + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0$

（このようにy^2の項を消す操作を「立方完成」といいます．）

ここで$p=\dfrac{-b^2+3ac}{3a^2}$，$q=\dfrac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$とすると，

$y^3+py+q=0$ …②となる．

このとき，$y=u+v$ （ただし$u+v\neq 0$)とおき，②に代入すると，

$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$，$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$，

$u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$

この式から，$u^3+v^3+q=0$ …③，$u+v\neq 0$ より$3uv+p=0$ …④

③，④よりvを消去して

$$u^3+\left(-\frac{p}{3u}\right)^3+q=0$$

両辺にu^3をかけて$u^6+u^3q-\dfrac{p^3}{27}=0$

これはu^3の２次方程式とみなせるので，解の公式$\left(x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$より，

$u^3=\dfrac{-q\pm\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}}{2}$，項を分けて$u^3=-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$

式を整えて$u^3=-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$

前項の(2)より，

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega,\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega^2$$

このとき，uとvは対称なので，vもuと同様に

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega,\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega^2$$

を持つ．

前項の(1)より$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解の個数は３つであることがわかるので(u,v)の組は３つしかないこともわかる．③，④を満たす(u,v)は，

$$(u,v)=\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right)\cdots⑤$$

$$=\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega,\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega^2\right)\quad\cdots⑥$$

$$=\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega^2,\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega\right)\quad\cdots⑦$$

（または、それぞれuとvを入れ替えたもの）

もとめた(u, v)より，xを求める．①と$y = u + v$より$x = u + v - \dfrac{b}{3a}$　…⑧

⑤と⑧より

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

⑥と⑧より

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega^2 - \frac{b}{3a}$$

⑦と⑧より

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,\omega - \frac{b}{3a}$$

よってこの３つが３次方程式の解である.

※本当はpとqを消去してa, b, c, dを使った形で表そうと思ったが，諸事情に乗せるのをやめたので，その作業は読者がやってみてほしい.

４．終わりに

３次方程式の解の公式の導出はいかがだっただろうか？この公式が，今後読者が高次方程式を解くときの助けとなれば幸いだ．また３次方程式のほかにも４次方程式の解の公式も存在するので，気になった人はぜひ調べてみてほしい.

５．余談

３次方程式の解の公式は「カルダノの公式」と呼ばれる．由来は３次方程式の解の公式を発見したと言われるジェラロモ・カルダーノだが実際に彼が発見したのではなく彼の友人であるタルダリアが発見した.

・５次方程式の解の公式は存在しない．（ガロア理論）
・虚数は３次方程式の解の公式を求める過程で発見された.

６．参考文献

・「ジェラロモ・カルダーノ」 Wikipedia
・「３次方程式」Wikipedia
・「高校数学の美しい物語」https://mathtrain.jp/
・数研出版　「チャート式基礎からの数学Ⅱ・Ｂ」

第９章

日本人は数学民族…？

高等部２年　＊＊＊＊＊＊

1. 日本人はもともと数学が大好きだった？

今、日本で「苦手な教科は何ですか？」と聞けば、「数学だよ！あんなのわかるわけなくね？」と答える人は多くいるだろう。しかし、日本では古くから数学が存在し、江戸時代には庶民は数学を文化として嗜み、世界の最先端に匹敵するほどの理論を作った人物もいる。何百年も前の日本人は数学が大の得意であったことは想像しがたいかもしれないが、今回は庶民が親しんだ数学を紹介してみようと思う。

2.江戸以前から存在した数学

そもそも人が集まって共同体が形成された時点で数学は生活に必要不可欠なものである。第一に数という概念が存在し計算ができなければ、人数を数えることもできないし、食料を分配することもできない。また日本では共同体を維持するために稲を育てていた。稲を育てるのも数学なしにはできない。なぜなら農地の面積から米がとれる量を予想しなければならないし、田植えや収穫などの時期を予測するには暦という概念がなければならない。数学はもともと生活のために必要なものとして生まれたのだ。この点は古代エジプトなどと似ている。

学問としての数学は古墳時代に中国から入ってきた。中国ではすでに面積から辺の長さを求める図形問題から連立方程式、さらにはピュタゴラスの定理（三平方の定理）まで知られていて、それらをまとめた本が存在していた。日本はこれらの本を使って勉強していた。

平安時代にはかの有名な「九九」が存在していたらしい。なにしろ、万葉集に九九を用いた言葉遊びがいくつもあるのだ。

「若草乃 新手枕乎 巻始而 夜哉将間 二八十一不在国」

これを現代の読み方で書くと

「若草(わかくさ)の新手枕(にいたまくら)をまきそめて夜をや隔(へだ)てむ憎(にく)くあらなくに」

となる。つまり「八十一」を「くく」と読んでいたのである。これは明らかに九九に基づいたものだ。日本人には昔から数で遊ぶという概念があったことが伺える。

室町時代には商業活動が活発化し中国からソロバンが伝わる。この当時から庶民も計算を行っていたようだ。またこの当時には「公式」という概念があり、田畑の面積を求める公式などを記した書が見つかっている。しかし残念ながらこの中には間違っているものも多かったようだ。例えば辺の長さがそれぞれa, b, c, dの四角形の面積の求め方を$\dfrac{a+c}{2} \times \dfrac{b+d}{2}$などとしている。これは明らかに誤りである。というか四角形は4つの辺の長さだけでは一つの形に定まらず面積も分からない。長方形の面積の求め方を参考に、少しつぶれた四角形の面積の求め方を想像したということなのだろうか。

16世紀末期には「天元術」という方法が使われるようになる。これは現代で言うところの「文字を使った方程式」である。xなどの代わりに当時は「甲」「乙」「丙」「丁」などの文字を使っていたようだ。しかしこれも中国で生まれたものである。

3.江戸時代は一家に一冊数学書！？

今までの数学は中国から輸入された学問であったが、江戸時代に入って日本人が改良を加えていくうちに日本オリジナルのものとして発展していく。日本独自の数学のことを西洋の数学と区別して「和算」と読んでいる。江戸時代以前と大きく違うのはあまり実用的でない

ものに対しても興味を持って、研究をしていたこと。また庶民が数学を娯楽として楽しんでいたことも大きな特徴だ。

それを示す一つの証拠として「数学書が一家に一冊あった」ことが挙げられる。江戸時代には1000以上の数学の本が出版された。これは同時代の世界の中でもダントツに多い。その中でも特に人気だったのが「塵劫記」だ。これは1627年に吉田光由が書いたものであり、庶民向けの数学の教科書である。これはとにかく売れた。なにしろ井原西鶴や十返舎一九といった有名作家の本より遥かに売れたのだ。塵劫記は解説本から海賊版（違法コピー版）までが作られ、300年間で塵劫記関連の本は400タイトルも発表された。数学書としての価値が非常に高いだけでなく、日本で初めての「多色刷り」の本だったようだ。それに加えて挿絵が多く数学を楽しんでもらおうという心遣いが見える。ちなみに「塵劫」というのは「変わることのない真理」という意味のようだ。数学が変わらない真理を表しているということだろう。

この本が人気であったのは誰でも読めるように分かりやすくなっているからだ。最初は九九から教える。それまでの時代の九九は中国にならって9の段から始めていたが、分かりやすいように下の段から始めるようにした。小学生が1の段、2の段と覚えていくのはこれが起源だと言われている。しかし吉田は1の段は当たり前なので省いた。また「三六（さぶろく）、一八（じゅうはち）」と「六三（ろくさん）、一八（じゅうはち）」の両方を覚えるのは無駄として省いた。これだけでも九九は半分になる。その一方で一桁の割り算を覚えさせた。現在では割り算は掛け算の逆としているが、わり算の九九を覚えることで、わり算の筆算を早く計算することができる。「二進（にっち）も三進（さっち）もいかない」というのは割り算において2でも3でも割れないということを意味していて、日常生活で数学の言葉が使われていたように思える。

また面白い問題も多い。たとえば「百五減算」というものがある。「碁石の山から、7個ずつ取ると最後に2個あまり、5個ずつ取ると1個、3個ずつ取ると2個あまる。この時、最初の碁石は何個あったか。」というものだ。塵劫記で書かれた解法はとてもトリッキーである。「7個ずつとったときのあまりに15をかけて30。5個ずつとったときのあまりに21をかけて21。3個ずつとったときのあまりに70をかけて140。これらを足すと、

30+21+140=191。191を105で割ると、あまりが86。よって元の碁石の数は86個」と求めるのだ。証明はこの章の最後に書いたが、あまり難しくなく自力でも証明可能なのでぜひ考えてみてほしい。ところで、この話を使うと、年齢を当てられるような…年齢を7,5,3で割ったあまりさえ教えてもらえれば年齢を瞬時に計算できるのだ。宴会のときなどに使ったらちょっと盛り上がるかもしれない。もちろん悪用は厳禁だ。

このような面白いネタもあれば、その一方でかなり高度な計算の方法も示している。たとえばある数の平方根（ルート）や立方根を計算する方法などだ。平方根の方は開平法として今でも習うが、立方根は現代ではまず習わない。計算量が多く、そろばんで素早く計算できることが前提となっているようだ。

また巻末には自分が数学を教わっている先生が本当に頭の良い人であるのかどうかを試す問題が載っている。これを「遺題」といい全部で12題あるのだが、その中でも今回は4題紹介しよう。

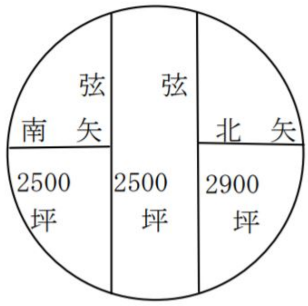
（其の一）辺aを斜辺とする直角三角形で$a+b=81, a+c=72$である。このとき直角三角形の辺a, b, cの長さを求めよ

（其の二）上底の円周が二尺五寸、下底の円周が五尺、高さが三間の円錐台がある。これを体積が等しくなるように三等分するとそれぞれの高さはいくつとなるか。なお、一尺＝十寸　一間＝六尺である。

（其の三）鎧二つと良い馬五頭を売り、悪い馬十三頭を買うと五両余る。鎧一つと悪い馬一頭を売ると過不足なく、良い馬を三頭買うことができる。良い馬六頭と悪い馬八頭を

売って鎧を五つ買おうとすると三両足りない。鎧、良い馬、悪い馬の値段を求めよ。

（其の四）直径が百間の円形の屋敷を平行な二本の弦によって分割し、真ん中が二千五百坪、両端がそれぞれ二千五百坪、二千九百坪となるように分けたい。このときのそれぞれの弦と矢の長さを求めよ。なお一坪は一間×一間の面積のことである。また塵劫記では計算を簡単にするために円周率を3.16としていることに注意せよ。



見て分かる通り、これらはなかなかに難しい。特に其の四は非常に難しく、四次方程式を解くことが必要らしく、自分は解くことができなかった。もし分かった方がいたら、来年の文化祭のときに教えて下さい。（なおこれらは現代語に意訳し一部文章を加えている。原文と一から三の解説はこの章の最後に載せた。）

この「遺題」という制度は画期的で、他の本も真似をした。そうしてある本の遺題を解いて更に難しく改良したものを自分の本に載せていって徐々にレベルが上がっていったのだ。

また江戸時代にはただ問題を解くだけではなく、解いた問題を神社に奉納することがあった。これは「算額」と呼ばれるもので現代でも残っているものも多い。今の感覚からすると理論的な学問である数学と神を信じる神社とは結びつかないように思える。しかし当時の人は難しい問題が解けたことを自分ひとりの実力と考えるのではなく、神のおかげと考えたようだ。数学は人知を超えたものと考え、神と結びつけるのは万物に神が宿ると考える日本人の性質からすると自然なのかもしれない。

そして算額も庶民の数学の上達に大きく貢献した。問題を解き、解けたことを感謝して問題と解答を神社に奉納する。それを他の人が見て、感銘を受けて、更に難しい問題に変えていく。そして解けた問題を算額として奉納する。こうして徐々に難しい問題に取り組んでいくのだ。

江戸時代よりはるか昔から数学が発展していた国は多くある。日本はかなり遅いと言える。しかし生きるための知恵としてではなく娯楽としての高度な数学をここまでの多くの一般庶民が楽しんでいた国は他にない。江戸時代は識字率が非常に高かったことで知られるが、数学のレベルもとても高かったことを忘れてはいけない。

4.和算はなぜ現代に残らなかったのか…？

ここまでの話を読んで、日本人はいかに数学が得意だったかは感じてもらえたと思う。庶民が数学大好きだっただけではなく、天才和算家たちの中には世界トップレベルにいたのではないかと言われる人物もいる。しかし、今は明治維新で入ってきた西洋の数学を教えているし、和算が得意という人もほとんどいない。どこで和算の文化は失われてしまったのだろうか。最後に自分の考えを書いておこうと思う。

よく言われる理由に「漢字を使っているなど記号の面で西洋に劣っていた」というものがある。確かに数学を漢字で縦書きで書いていくというのは見辛いように思える。しかしそれは現代の僕らが横書きで書いているからそのように感じるのではないだろうか。縦書きしか使っていない人からしたら、数学を縦書きで書いてあっても不便に感じることなく理解できるだろうし、劣っていることもなかったように思える。

それよりも大きな理由は「難しい問題に答えを与えることで満足していた」ということだと考えている。和算は問題の答えを求めることをもっとも重視したようだ。算額を見ても問題と解答はあるが、なぜそのようにして解けるかということについては記さないことが多い。問題を解けることはもちろん重要なのだが、その過程をじっくり考察することが残念ながら少なかったのではないだろうか。

例えば、算額の中には八次方程式を解かなければならないものもあった。とても難しそう

であるが、当時は高次方程式の解を求める手法が知られていた。しかしこれは現代の考え方とは大きく異なり近似値を求めるような方法だった。なぜならそもそもとして五次より高次の方程式の解の公式は存在していないからだ。その代わり江戸時代の方法ではどれだけ高い次数の方程式であっても近似値を求めることができた。完全な数値を求めるのではなく、おおよそこのくらいという値を求めていたのだ。時間をかけてとても複雑だが正確な答えを求めるより、ぱっとそれらしい答えを求められたほうが実用的かもしれない。しかしそれでは方程式の研究には繋がりにくい。

もちろん近似値を求める操作が悪いわけではない。特に円周率を正確に求めることに関しては世界よりも遥かに進んでいた。関孝和は小数点以下10桁まで正確に計算し、その弟子である建部賢弘は小数点以下41桁まで正確に計算した。彼らが当時使っていた手法は非常に高度なもので同じ理論が西洋で生まれたのは更に200年後の1900年代のことだった。

ではなぜ彼らの天才的な手法が世界に広まることはなかったのだろうか。僕はやはりこれも「問題の答えに重点をおいていた」からだと思う。あくまで円周率を正確に求めることが一番の目的であって少ない計算量で正確に求めるための理論は一つの手段に過ぎなかった。そのため、理論を弟子や後世に伝えていこうという努力はあまりしなかったようだ。

このように問題を作り、解くことに関しては一流であったが、それらを体系的にまとめて他の人に伝えていくということがあまり行われなかったため、学問としては未熟な状態であった。その後西洋化の流れの中で和算は失われ西洋の数学を取り入れる決断をする。もちろん西洋の数学をスムーズに国内に広めることができたのは間違いなく和算のおかげでもある。

もし仮に日本の数学が100年早く始まっていれば、西洋を超える理論を作って、和算が「Wasan（ワサン）」として世界中に広まっていたかもしれない。しかし歴史に「もしも」はないので、今回はこのへんで終わりとしておく。

5.終わりに

今まで数学研究会の部誌では確率の話や極限の話などをやっていたのだが、たまには日本の数学や歴史のことに目を向けてみようと思いこのテーマを選んでみた。結果としては大正解だったようだ。

過去に数学研究会で算額の問題を解いてみたことがあるのだが、とても難しかったのを覚えている。そろばんを使うことが前提であるために、計算も大変だし、図形もとても複雑なのだ。またその時の解答もすでに述べたように厳密な値ではなく近似値を正解としていて当時はなんとなく納得できないものもあった。今考えてみるとそこが西洋との違いだったらしい。和算には面白い考え方も多いので廃れていっているのは残念だ。

また調べていく中で現代の日本人には数学が苦手な人が多いということの一つの理由というか仮説が思いついた。それは「西洋の数式を発音しにくい」ということだ。和算は変数も漢字でおいているし、計算も全て日本語で書かれているので発音しやすい。それに対し、今の数学は数式の読み方をあまり教わらない。友達と会話するときもシグマや極限の記号のちゃんとした読み方がわからないのでごまかして言いがちである。これは数学を自分のものとして理解する上で障壁となってしまう。グローバル化が盛んに言われる時代なので日本だけ独特な数式の読み方をするのは良くないのかもしれない。それでもなんとかして元々日本語ではない数式を日本人も直感的に読めるようにならないものか。そうすれば少しは自分たちの学問として捉えやすくなる気がするのだが…

最後に建部賢弘の言葉を紹介したい。この言葉こそが日本人が数学に親しんだ理由を示しているように感じる。

算数の心に従うときは泰（やす）し、従わざるときは苦しむ

6.補足

Ⅰ百五減算

碁石の数をn、3個ずつとったときのあまりをa、5個ずつとったときのあまりをb、7個ずつとったときのあまりをcとする。$70a+21b+15c$をkとおく。kを105で割ったあまりがnに等しくなることを示す。modを使えばもう少し簡単に書けるのだが、今回は和算らしく小学生にも分かるように書こう。

kを3で割ったあまりを考える。$21b$と$15c$は共に3の倍数。$70a=3\times 23a+a$となるので、kを3 で割ったあまりはa。

kを5で割ったあまりを考える。$70a$と$15c$は共に5の倍数。$21b=5\times 4b+b$となるので、kを5で割ったあまりはb。

kを7で割ったあまりを考える。$70a$と$21b$は共に7の倍数。$15c=7\times 2c+c$となるので、kを7で割ったあまりはc。

3,5,7で割ったときのあまりが等しくなる数は36と141のように105の倍数だけ離れているので、最後に105で割れば答えになる。ちなみにこの問題では暗黙のうちに碁石の数は105個以下であるとしているようだ。

3,5,7以外の数においても同じような問題ができるのだろうか。もし興味がある人は考えてみてほしい。

Ⅱ遺題の答え

（其の一）

原文：

東いぬいうちまわり二方共に八十一間有

又東方の長さ問、いぬいの方広さ問、ひつじさる方広を問

東ひつじさるうちまわり

二方共に七十二間有

解答：

$a^2=b^2+c^2\cdots①$，$a+b=81$, $a+c=72$

よって、$b=81-a$,$c=72-a$

これを①に代入すると、

$(81-a)^2+(72-a)^2=a^2$

$0<a<72$に注意すると$a=45$(間)

よって$b=36$(間),$c=27$(間)また面積は486(坪)

（其の二）

原文：

今唐木有　長さ三間に本口まわり五尺寸あり

すえ口まわり二尺五寸あり　此れ代銀拾枚也

三人としてかい申時　三人へ等分にきりとる時にハ

本ハ　なにほとの長さ　すえより長さなにほととる

そと問

解説：

円錐台は円錐の上の部分を切り取ったものと考えることができる。この円錐台においては切り取った小

さい円錐の高さは18尺である。この小さい円錐の体積をVとする。切り取る前の円錐台の高さは36尺。よってもとの円錐台の体積は8-1=7より7V。よって切り分けた3つの円錐台の体積は$\dfrac{7V}{3}$と表せる。

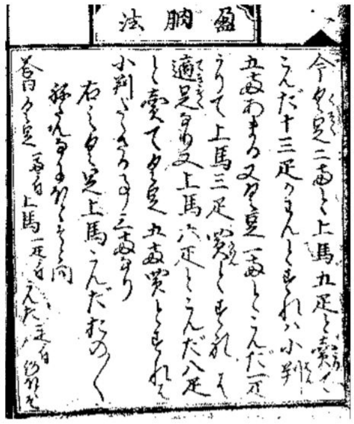
切り分けた円錐台の高さを順に$18a$, $18b$, $18c$(尺)とすると

$$a+b+c=1,\ (1+a)^3-1=\frac{7}{3},\quad (1+a+b)^3-(1+a)^3=\frac{7}{3}$$

$$2^3-(1+a+b)^3=\frac{7}{3}$$

これは3次方程式となってしまうが、当時は高次方程式の解を近似する方法が存在していた。自分はその方法を知らないので関数電卓を使って計算すると、

$18a=9.6291, 18b=5.6359, 18c=4.2348$(尺)となる。



(其の三)

原文：

今具足二両と上馬五疋と売りて
こんだ十三疋かハんとすれハ　小判五両あまる　又具足一両とこんだ一疋うりて上馬三疋買わんとすれば　適足なり　又上馬六疋とこんだ八疋と売て具足五両買とすれば　小判たらざる事三両なり　右の具足上馬こんだおのおのねたんなにほとそと問　答曰具足一疋、上馬一疋、子荷駄一疋に付き

解答：

具足一疋、上馬一疋、小荷駄一匹の値段をそれぞれx, y, z(両)とする。

$2x+5y=13z+5$

$x+z=3y$

$6y+8z=5x-3$

この方程式を解くと$x=6, y=2.5, z=1.5$(両)となる

(其の四)

原文：

さしわたし百間の屋敷を三人へわりて渡す時　一人ハ二千九百坪　一人ハ二千五百坪　一人ハ二千五百坪　北より矢のひろさ弦の長さハなにほどそ
又中の矢のひろさ弦の長さおのおのなにほとゝ問

7.参考文献

・「江戸の数学教科書」　桜井進
・http://hyonemitsu.web.fc2.com/Idai12mon.pdf

第10章

４次元で遊ぶおはなし

高等部３年　　＊＊＊＊＊＊

１．はじめに

「４次元」という言葉はたまに聞きますけど，よくわからないですよね．私もよくわかりません．でも学校でも教えてくれません．そもそも次元って何なのでしょう？ここでは２，３次元の場合をもとに４次元の世界を少しずつ見ていきましょう．

２．次元とは？

「次元」という言葉は実はちゃんとした数学用語です．

「体K上の有限生成の{0}でないベクトル空間Vの基底に含まれる個数をVのK上の次元という．」

らしいのですが何を言っているのかよくわかりません．では平面に住む犬で考えましょう．

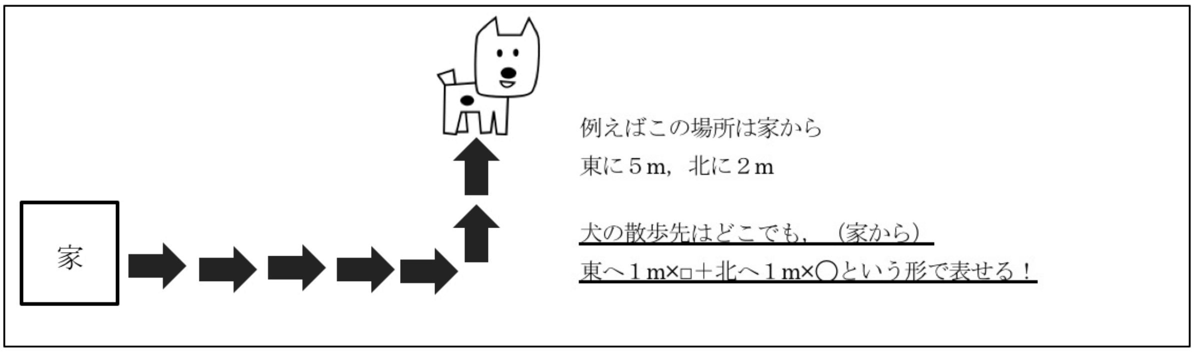


図　ベクトル空間の犬

下線部のことを**有限生成**といいます．それから，この□と〇の少なくとも片方が０でないとき必ず散歩先は家ではありませんよね．このことを「東へ１歩」と「北へ１歩」は**１次独立**であるといいます．有限生成，１次独立という条件がそろった時，「東へ１歩」と「北へ１歩」のことを**基底**と呼びます．この基底の個数が次元です．さあ，基底は何個ありますか？２個です．つまり犬のいる平面（一種のベクトル空間）の次元は２だ！

これに上下方向「上へ１歩」が加わってもその３つはこの条件を満たすので，次元は３です．

Q．「東へ１歩」「北へ１歩」「北西へ１歩」の３つでは３次元でしょうか．

さてさて，数学はかならずしも位置について扱うわけではないので，数字だけ取り出すことにします．「東へ５歩，北へ２歩」の場所のことを(5, 2)と表すことにします．２次元の時の基底は(0, 1), (1, 0)と書けますね．この書き方なら４次元の場所も簡単に書けますね！(1, 0, 4, 3)といった感じです．（どこだよ…）これを**座標**と呼ぶことにします．

次の章ではこの書き方を使って，４次元の立方体を見てみることにします．

３．４次元立方体を考える

とりあえずこういう風に考えるとよさそうですね.

２次元	平面	長さ１の直線に囲まれている	⇒	正方形
３次元	立体	面積１の正方形に囲まれている	⇒	立方体
４次元	超立体	体積１の立方体に囲まれている	⇒	超立方体？

まず正方形の位置を座標で表しましょう.

(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) の４つです

つぎに立方体の位置を座標で表します.

O(0, 0, 0), A (0, 0, 1), B (0, 1, 0), C (1, 0, 0)

D(1, 1, 0), E (1, 0, 1), F(0, 1, 1), G (1, 1, 1) の８つです

では４次元立方体はどうなるでしょうか. 全部書くと大変なので
立方体の座標に対応させて考えます.

(0, 0, 1)に対して(0, 0, 1, 0)と(0, 0, 1, 1)の２つを対応させると点は16個です.

辺の数は, １つの点から各軸方向に４つ辺が出ていること, 辺の両端が点であることから,
□× 2 ÷ 4 ＝16　　□＝32　　32本です.

同じように面の数も求められるのでまとめると
右の表のようになります.

次元	2	3	4
図形	正方形	立方体	超立方体
点の数	4	8	16
辺の数	4	12	32
面の数	1	6	24

ここで２点間の距離を求める公式を紹介します！

平面の場合　$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

空間の場合　$P_1(x_1, y_1, z_1),\ P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ということは４次元空間の場合は

$P_1(x_1, y_1, z_1, w_1),\ P_2(x_2, y_2, z_2, w_2)$として、

$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}$$

ですね！

ここでxは横, yは縦, zは高さの座標（位置）と考えていいのですが, そうするとwってなんだ？
ということになります. この話はまた後でするとして, この公式で４次元立方体の対角線の長さを求めることができます.

４次元立方体の対角線のうち一番長いものの長さはいくつでしょう？

$P(0, 0, 0, 0),\ Q(1, 1, 1, 1)$とすれば長さは$\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4} = 2$

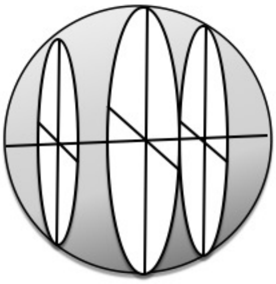
となります。

４．４次元球の体積は？

４次元の立方体が少し見えてきたので次は球かな〜って思いますよね！ところが球というのは難しく，いろいろネットをあさっていると多重積分使わなければならないようです.

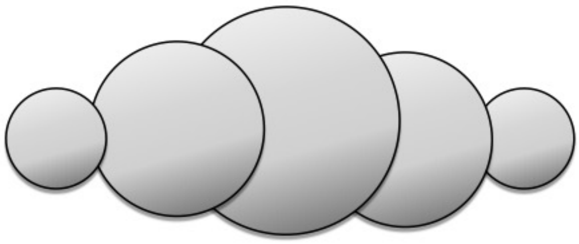
ここでは多重積分ではなく高校の範囲の積分でゴリ押す証明を紹介したいと思います.

考え方



球を左の図のように薄くスライスして
それぞれの面積×厚みを足し合わせれば球全体の体積になる

４次元球はスライスすると
球になるので
それぞれの体積×厚みを
足し合わせれば球全体の超体積になる



この考え方はそのまま積分に持ち込むことができるのですが，スライスしてできた球の体積を求めなければなりません．yzw空間でスライスすることを考えます．x座標がa(<r)の場所でスライスされた球の体積を求めます．球なのでその半径がわかればよいです.

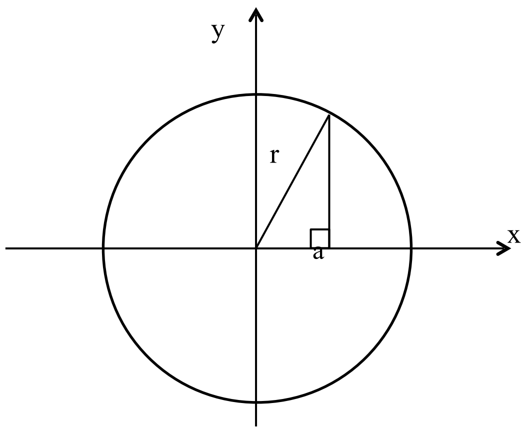
ということでその半径を求めます．この４次元球をxy平面で切った図を考えます.

三角形の高さの部分が球の半径なので

つまり$y=\sqrt{r^2-a^2}$です.

今xy平面で切りましたが,
xz平面で切っても，xw平面でも
同じような切り口になります.

これで準備は整いました.



$$V=\int_{-r}^{r}\frac{4}{3}\pi y^3dx=\frac{4}{3}\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi\int_{0}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3dx$$

$$=\frac{8}{3}\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta)^3r\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}r^4\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\pi r^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\pi r^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos4\theta}{8}+\frac{\cos2\theta}{2}+\frac{3}{8}\right)d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\pi r^4\left[\frac{\sin4\theta}{32}+\frac{\sin2\theta}{4}+\frac{3}{8}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2r^4}{2}$$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$
を代入
【置換積分】
$x=r\sin\theta$
とおくと
$dx=r\cos\theta\,d\theta$
$x\quad 0\to r$
$\theta\quad 0\to\frac{\pi}{2}$
【４乗を消すための変形】
倍角の公式を用いると

$$\cos^4\theta=\frac{\cos4\theta}{8}+\frac{\cos2\theta}{2}+\frac{3}{8}$$

計算する
→おしまい

すごく大変でしたがなんとか求めることができました！！
こんなに複雑なのに最後は簡単になりました．

積分はうまく工夫しないと計算ができないというのが難しいです．

５．終わりに　～こんな数学をやって何のためになるのか～

いかがだったでしょうか，４次元というみえないものを数学でとらえようとするお話．
かなり難しい部分もあったかと思いますが，今はわからない部分があっても中学高校と勉強していくとわかるようになることがたくさんあります．ぜひ，この部誌を保管しておいて何年後かにまた手に取ってみてください．きっと違って見えるはずです．

さてさて私は部誌第１号から登場して書くのも４回目だったわけですが，３連続ぐらいで役に立たない数学を題材にしてしまいました．数学は，科学や情報学，経済学などで使われることもあれば，全然使い道のないものもあります．ではなぜそのようなものを今までの数学者は考えてきたのでしょう？超単純にいうと「おもしろいから」だと思います．
学校や塾で教わるものだけが数学ではありません．数研の文化祭で，少しでも「面白い！」と感じて頂けたらそれだけで幸いです．

おわりに

　この会誌を読んでいただきありがとうございました。今年の会誌もレベルの高いテーマがとても多く編集しながら見入ってしまいました。

「数学」と聞くとどこか難しそうなイメージがありますが、身近なところでたくさん数学は役に立っています。数研のブース、そして会誌で数学の幅の広さ、奥の深さを感じてもらえたのではないでしょうか。

数研の文化祭も今年で４回目。毎年部員も増え、活動の幅も広がり、グレードアップしています。今後の数研の活動にご期待ください！！！

以下のホームページで数研の活動や過去の会誌のデータを閲覧できます。
http://sukensite.starfree.jp/

[すうけん2019メンバー]

顧　　問
副 顧 問
高等部３年
高等部２年

高等部１年
中等部３年
中等部２年
中等部１年

数学研究同好会 会誌 第４号

2019年10月５日　発行
著作・編集　　数学研究同好会
発行・印刷　　数学研究同好会
監　　修