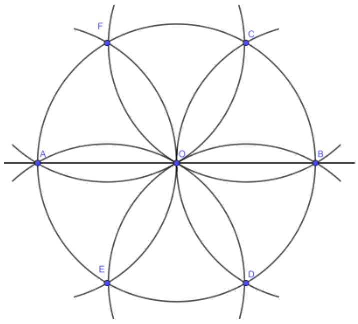
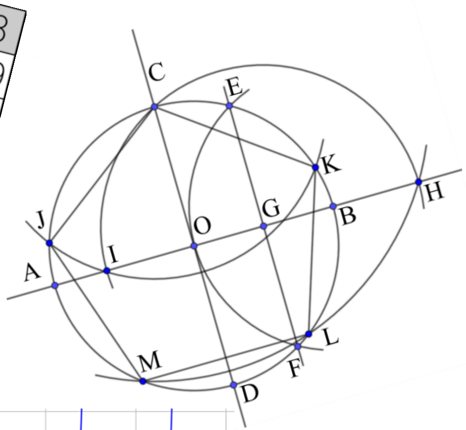
数学研究同好会

会誌 第 3 号

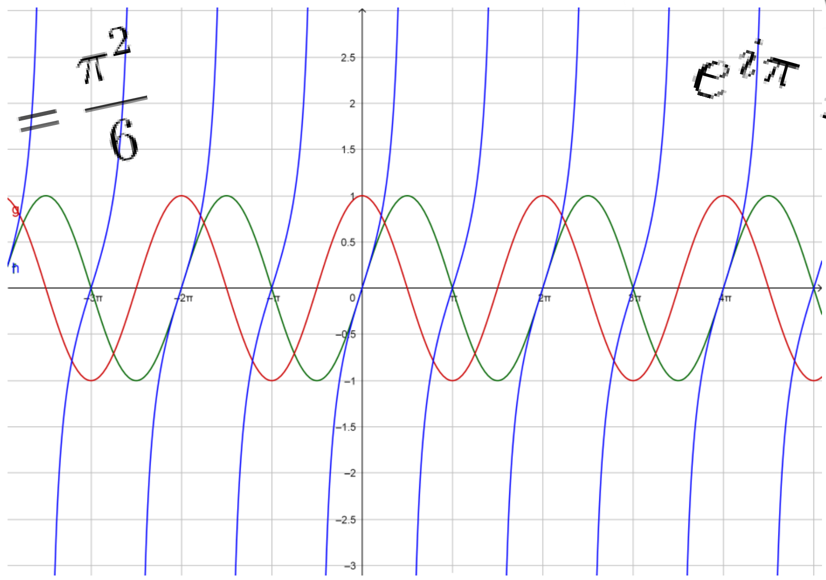


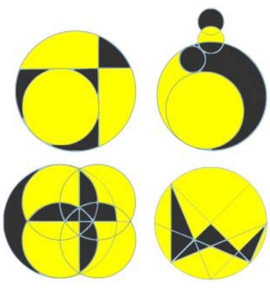
1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64



$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$e^{i\pi}=-1$$

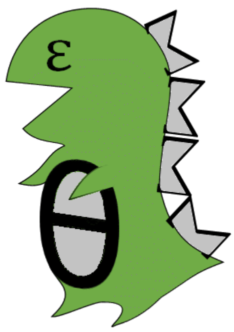




早稲田実業学校　いなほ祭

2018.10.6-7

制作：数学研究同好会



まえがき

こんにちは！ 数学研究会です！

本日は，早稲田実業学校いなほ祭，そして私たちの数学研究同好会ブースへご来場いただきありがとうございます！ 展示や体験コーナーの方は楽しんでいただけたでしょうか？

数学研究同好会は，数学の好きな人が集まって，数学の問題を出し合ったり，議論したり，各種コンテストに出たりしています．現在部員は 15 名ほどで運動部との兼部をしてる人も多いです．

今年は「すうけん ^{3}」という企画名なのですが，これは文化祭参戦 3 回目という意味が込められています．ちなみに会誌も第 3 号ですね！ 前回よりもパワーアップした気がします！！
この会誌では，部員がそれぞれ，好きなテーマで数学の面白さを伝えます．難しいところや，わかりづらいところ，まちがっているところなどあるかもしれませんが，一通り目を通してみてください！ そして，「今は難しすぎる...」と思った方は，この部誌をとっておいて，何年後かに読んでみてください．新しい発見があるかも！！

すうけんの歩み

2005 年　初代　数学研究同好会設立
その後部員の減少により，消滅...
2015 年　二代目　数学研究会が現大 2 生中心に設立！
2016 年　数学オリンピック予選通過 1 名＆数学甲子園に参加＆文化祭に初参加！
2017 年　文化祭，2 回目の参加！
2018 年　同好会に昇格！
数学オリンピック予選通過 1 名＆ジュニア数学オリンピック予選通過 1 名
初等部 6 年生との交流〜数学入門講座〜
数学甲子園参加＆文化祭 3 回目の参加！
今までは非公式団体だったのですが，同好会に昇格しました！ これは部員，先輩方そして，多くの先生の協力のおかげです．ありがとうございます．

すうけんの今後の目標

数学オリンピック・ジュニア数学オリンピックでもっといい成績を残す！
数学甲子園本選出場！

同好会になったこともありますし，さらなるレベルアップを図りたいところですね．

目次

数学のルール

会誌を読む方の中には、数学初心者の方もいると思います。以下にこの会誌を読むうえで最低限の必要な知識をまとめましたので、ぜひ読んでください。

自然数　1, 2, 3, 4, 5, ⋯
整数　⋯, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ⋯
有理数　分数で表せる数（整数も含む）
無理数　分数で表すことのできない数（円周率など）

実数　数字を並べて表せる数（無理数も含む）

↓小学校で使う□や○は次のように書きます.
a, b, c など　定数（なんかしらの決まった数が入る）
α, β, θ など　定数（それぞれアルファ, ベータ, シータ）
x, y, z など　変数（中身の数は場合によって変わる）

π　円周率 3.14159⋯を表す（パイと読む, 無理数）
a^2　$a\times a$ (a の 2 乗と読む)
$\sqrt{a}$　2 乗すると a になる数
$\log_a b = n$ のとき、$a^n = b$
関数　片方の変数を決めると，もう片方の変数も決まる
　ような式（たとえば $y = ax^2$ など）
命題　真（正しい）か偽（誤り）かが決まる問題や定理
定義　何かを明確に決める約束
公理　証明なしに正しいと認める約束
定理　定義や定理から導かれる真の命題

第Ⅰ部

フィボナッチ数列について

中等部１年　＊＊＊＊

１，１，２，３，５，８，13，21，34，55，89，144，233，377，・・・というような数列をフィボナッチ数列といいます。この数列についてみていきます。この数列が最初に出てきたのは，13 世紀の『算盤の書』という本に出てくるこの問題です。

［問題］

・ひとつがいのウサギは、生まれて２ヵ月後から毎月ひとつがいずつのウサギを産みます。
・ウサギが死ぬことはありません。
いま, 産まれたばかりのひとつがいのうさぎがいます。１年後には何つがいになりますか？

答えは, 調べていくと，１，１，２，３，５，８，13，21，34，55，89，144，233 より,233 つがいとなります。
次に, フィボナッチ数列の性質についてみていきます。
広く知られていることですが, フィボナッチ数列の n 番目の数は,n －１番目の数と n －２番目の数の和になっています。では, ほかにはどのような性質があるのでしょうか。

フィボナッチ数列の数を１つおきに取り出してみると１，２，５，13，34，89，233，・・となります。これを連続する３つの数で分けると (１，２，５)，(２，５，13)，(5，13，34)，(13，34，89)，・・・となります。そして，それぞれのグループから２つの数を取り出して，その積から１を引くと平方数になります。
例えば (１，２，５) なら,
$1 \times 2 - 1 = 1 = 1 \times 1$
$1 \times 5 - 1 = 4 = 2 \times 2$
$2 \times 5 - 1 = 9 = 3 \times 3$
となります。

さらに, その残りである１，３，８，21，55，144，377・・・を連続する３つの数で分けると (１，３，８)(３，８，21)(８，21，55)(21,55,144) となります。そして, それぞれのグループから２つの数を取り出して, その積に１を足すと平方数になります。
例えば,（１, ３, ８）なら,
$1 \times 3 + 1 = 4 = 2 \times 2$
$1 \times 8 + 1 = 9 = 3 \times 3$
$3 \times 8 + 1 = 25 = 5 \times 5$
となります。
そして, これらの平方数の正の平方根は，すべてフィボナッチ数列に登場する数になっています。

フィボナッチ数列において，n 番目の数が，n − 1 番目の数の何倍になっているか見てみると，（割り切れない場合は小数第４位を四捨五入）

$$1 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 8 \to 13 \to 21 \to 34 \to 55$$

1 倍　2 倍　1.5 倍　1.666 倍　1.600 倍　1.625 倍　1.615 倍　1.619 倍　1.618 倍

と，黄金比（約 1 : 1.618）　に近づいているのがわかると思います。なんとも神秘的な数列ですね。
最後に，フィボナッチ数列に類似した数列を見て来たいと思います。

・トリボナッチ数列

n 番目の数が n − 1 番目の数と n − 2 番目の数と n − 3 番目の数の和になっている数列です。

1，1，2，4，7，13，21，44，81，149，274，・・・となります。

・テトラナッチ数列

n 番目の数が n − 1 番目の数と n − 2 番目の数と n − 3 番目の数と n − 4 番目の数の和になっている数列です。

1，1，2，4，8，15，29，56，108，208，401，・・・となります。

このように，フィボナッチ数列には，今回紹介した性質以外にも，面白い性質がたくさんあります。興味をもたれたら，ぜひ調べてみてください。最後までお読みいただきありがとうございました。

☆論理パズル☆

高等部 1 年　＊＊＊＊

論理パズル (ロジックパズル) とは、数学パズルの一種で、与えられた条件の中から論理的に矛盾のない 1 通りのパターンを見つけ出す、というようなパターンの問題のことです。こういわれるとなんだか難しそうに感じてしまうかもしれませんが一つ一つ条件を整理していけば絶対に答えは出ます。これは数学と似ていますね。では問題！

Q1 : 次の 3 人のうち、1 人が正直者でほかの 2 人がうそつきです。次の会話の中から正直者を探し出してください。

A「私が正直者よ。私だけが正直なの！」

B「A はうそつきだ！ 私が正直者だよ！ 信じて！」

C「B はうそつきだね。本当の正直者は僕だよ。」

Q2 : ひとつの花束がありました。その花束から 2 本抜き取ったらすべてが赤い花、違う 2 本を抜き取ったらすべてが白い花、また違う 2 本を抜き取ったらすべてが青い花になるという。これはどんな花束？

Q3 : 3 匹の猫が 3 匹のネズミを捕まえるのに 3 分かかります。では、100 匹のネズミを 100 分で捕まえるには猫は最低何匹必要でしょう。

解説は読んでいくとどこかにあります。

第 II 部

0 についての小話

高等部 1 年　＊＊＊＊

初めに

まず、この数学研究同好会の部誌を手に取って下さりまことにありがとうございます。今回私がお話しするのは「0」についてです。この話から皆さんが数学に対して少しだけでも興味を持ってくれたらいいなと思っています。

0 の歴史

0 という数字の概念ができたのは 5 世紀ごろのインドだとされています。それ以前にはただ位取りや桁を表す記号としてでしか使われませんでした。その後、インドの数学者ブラーマグプタによってほぼ現代と同じような定義にまとめられ、今日に至ります。

数学界における禁断の行為　0 除算

すごいタイトルに威圧感がありますが、簡単に言えば『数字を 0 で割るのは、ダメだよー』ということです。
じゃあなんでダメなのか。端的に言ってしまえば、答えが出ないからです。
ここで、「$1 \div 0 = 0$　だから答え出てるじゃん」と言う人がいるかもしれませんがそれは間違いです。
そもそも　$1 \div 0 = 0$ ではありません。
では結局、答えはどのようになるのでしょうか？
実はこれの答えは代数学、解析学それぞれの解釈によって得られる答えが変わってきます。

代数学的な答え

まずこれを説明する前に皆さんにはそもそも割り算が何をしているのかというのをわかってもらう必要があります。割り算とはもともとはかけ算の逆の演算を意味しているので割り算からかけ算へ、かけ算から割り算へ、というふうに変換することが
例えば、

$10 \div 2 = 2 \Longleftrightarrow 10 = 2 \times 5$　という感じです。

この式とまったく同じように先ほどの式を変換してみましょう。(わかりやすさのため商は X とする)

$$1 \div 0 = X \Longleftrightarrow 1 = X \times 0$$

そうです。X にどのような数を入れても右側の等式が成立しないのです。先ほど、『0 除算ができないのは答えがでないからだ』と言いましたが、このことだったのです。
では次に、$0 \div 0$　がどのようになるか考えてみましょう。
先ほどと同じように考えてみると、次のようになります。

$$0 \div 0 = X \Longleftrightarrow 0 = X \times 0$$

この場合、右の式は X にどのような数を入れても成立します。つまり答えが定らないことになってしまうのです。

まとめると、代数学的には、1÷ 0　は解なし（不能）　、　0÷ 0　は解が定まらない（不定）となります。

解析学的な答え

こちらの解説は少し難しいので、イメージ的な話にとどめておきます。
例えば、　1÷□　　という式があり、□には自由に数を入れられるとします。

まず、□＝1のとき、　　1÷ 1＝1
次に、□＝0.1のとき、　　1÷ 0.1＝10
□＝0.01のとき、　　1÷ 0.01＝100
□＝0.001のとき、　　1÷ 0.001＝1000
□＝0.0001のとき、　　1÷ 0.0001＝10000
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

という風に、□が0に近づくほどに、商は大きくなっていきます。
このことを考えてみると、□が極限まで0に近づけば、商はどんどん大きくなり最終的には＋∞になると考えられています。
一見この結論が正しいように感じますが、実はこれにも大きな穴があります。

先ほどは＋のほうから0へ近づけましたが、次は－のほうから近づけてみましょう。

まず、□＝－1のとき、　　1÷（－ 1）＝－1
次に、□＝－0.1のとき、　　1÷（－ 0.1）＝－10
□＝－0.01のとき、　　1÷（－ 0.01）＝－100
□＝－0.001のとき、　　1÷（－ 0.001）＝－1000
□＝－0.0001のとき、　　1÷（－ 0.0001）＝－10000
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

今度は□が0に近づくほどに、商が小さくなっていきます。
この場合　□が極限まで0に近づくと、商は－∞になると考えられています。
つまり先ほどの考えもあわせて考えてしまうと、1÷ 0＝±∞　になり、
答えが2つ出てきてしまうというわけが分からないことが起きてしまうのです。

以上が0除算することができない理由です。

最後に

「0」についての話はいかがだったでしょうか。
あまりうまく説明できていない部分もあったとは思いますが、読んでいただきありがとうございます。
参考(　0　―Wikipedia―　、　ゼロ除算　―Wikipedia―　)

第 III 部

公式を証明できますか？

高等部 1 年　＊＊＊＊

１．はじめに

皆さんは「公式」と言われたら何を真っ先に思い浮かべるでしょうか。例えば「三平方の定理」だったり「加法定理」だったり、それらは人それぞれだと思います。しかし、今思い浮かべたものを正しく理解、証明できているでしょうか。そこで今回は私の独断と偏見でいくつかの有名な公式や性質を証明していきたいと思います。

２．平行移動（中学レベル）

まず初めに紹介するのは中学でも高校でも使われる平行移動の性質です。例えば、関数 $Y = X^2$ を X 軸方向に a、Y 軸方向に b 平行移動したいと思ったら $Y - b = (X - a)^2$ のようにして計算すると思います。グラフを描いて移動させると直感的には正しいと理解できると思いますが、本当に成り立つのか、一般の関数 $y = f(x)$ の場合で証明していきます。

＜証明＞

$y = f(x)$ 上の任意の点を $P(a, b)$ として P を x 軸方向に p、y 軸方向に q 平行移動した点を $Q(X, Y)$ とする。

$X = a + p$ と $Y = b + q$ より $a = X - p$、$b = Y - q$ となる。

P は $y = f(x)$ 上の点であるから $b = f(a)$ より、$Y - q = f(X - p)$ となる。

よって $Q(X, Y)$ は $Y - q = f(X - p)$ 上にある。

＜証明終＞

３．相関係数（高 1 レベル）

次は高 1 で習う相関係数について書いていきたいと思いますが、その前にこの分野の基礎的な知識だけ確認しておきます。

変量 x についてのデータの値が $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ でその平均を $\bar{x}$ とするとき、$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$ をそれぞれ平均 $\bar{x}$ からの偏差という。また、偏差の平方の平均値 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ を変量 x の分散といい、分散を s^2 とすると $\sqrt{s^2}$ を標準偏差という。加えて、2 つの変量 x,y について、x に関する偏差と y に関する偏差の積の平均値 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})$ を変量 x, y の共分散という。x の標準偏差を s_x, y の標準偏差 s_y, 変量 x と y の共分散を s_{xy} とすると、この章の本題である相関係数 r は $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$ と表せる。

用語の説明は終わったので本題である相関係数について書いていきます。相関係数の特徴といったら絶対値が 1 以下である点が挙がると思います。では、本当に絶対値が 1 以下になるのかを証明していきます。

＜証明＞

相関係数を r とすると $r = \dfrac{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}))}{s_x s_y}$ である。

$u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{s_x}$, $v_i = \dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y}$ とおくと $r = \dfrac{1}{n}(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)$ となる。

ここで $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - v_i)^2 \geqq 0$・・・(1)

$\dfrac{1}{n}(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2) = \dfrac{1}{n}\dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{{s_x}^2} = \dfrac{{s_x}^2}{{s_x}^2} = 1$

同様に $\dfrac{1}{n}(v_1^2 + \cdots + v_n^2) = 1$

(1) より $\dfrac{1}{n}(u_1^2 + \cdots + v_u^2) - 2\dfrac{1}{n}(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) + \dfrac{1}{n}(v_1^2 + \cdots + v_n^2) \geqq 0$

$\quad \therefore \quad 1 - 2r + 1 \geqq 0 \qquad \therefore \quad r \leqq 0$

同様に $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^2 \geqq 0$・・・(2)　より　$1 + 2r + 1 \geqq 0$　　　$\therefore \quad r \geqq -1$

よって $-1 \geqq r \geqq 1$

(1) で $u_i = v_i$ のとき、$r = 1$、(2) で $u_i = -v_i$ のとき $r = -1$

＊今証明した中でΣを使用した式とそうでない式がありますが、特にその違いはないのでΣを用いない方が分かりやすい式には使用していません。

少し長くなりましたがこれで証明できました。また、コーシー・シュワルツの不等式を用いても示すことができます。＜証明＞

コーシー・シュワルツの不等式から

$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$ が成立する。

ここで、$a_i = x_i - \bar{x}$, $b_i = y_i - \bar{y}$ とおくと、

$(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))^2 \leqq (\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2)(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2)$ となり、

$\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \leqq 1$ から $-1 \leqq \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \leqq 1$

４．コーシー・シュワルツの不等式（高２レベル）

先程コーシー・シュワルツの不等式を用いて相関係数の範囲について証明しました。では、その不等式はどのように導かれるのでしょうか。一般の場合で考えてみます。

＜証明＞

任意の実数 t に対して、

$\sum_{i=1}^{n}(a_i t - b_i)^2 \geqq 0$・・・(1) が成り立つ。

左辺を展開すると $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq 0$ となる。

左辺の式 t についての 2 次式とみると、(左辺) $\geqq 0$ であるから、その判別式 D は 0 以下でなければならない。

よって、$\dfrac{D}{4} = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqq 0$

$\quad \therefore \quad (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqq 0$

等号成立は (1) の不等号が等号となるときである。

よって等号成立条件は $a_1 t - b_1 = a_2 t - b_2 = \cdots = a_n t - b_n$ である。

非常にきれいに証明できました。実はこの方法以外にも幾何学的なアプローチの仕方もあります。３次の場合で考えてみます。

＜証明＞

$\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$ と置きます。

内積を考えると $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$\therefore \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\cos\theta$$

$$\therefore \quad (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\cos^2\theta$$

$-1 \geqq \cos\theta \geqq 1$ より $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$

等号成立は $\cos\theta = \pm 1$

つまり、２つのベクトルが平行な場合です。

５．極限（高３～大学レベル）

高校では極限を扱うときにかなり曖昧な表現で説明されています。例えば $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha$ は「x が限りなく 0 に近づく」などのように言われます。では、どのようにしたら厳密な説明になるのでしょうか。それを解決してくれるのは $\varepsilon - \delta$ 論法です。

$\varepsilon - \delta$ 論法を用いた定義

定義 1　「区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ と $a \in I$ に対して、

$$\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 s.t. \forall x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つとき関数 $f(x)$ は $x \to a$ のとき α に収束するといい、

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ または $f(x) \to \alpha (x \to a)$ などと表す」

これで収束が厳密に定義できました。これを使って関数が連続であることを定義します。

定義 2　「区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が $a \in I$ において連続であるとは、$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ となることである。

よって $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 s.t. \forall x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる」

これらを踏まえて例を見てみましょう。

例. 関数 $f(x) = 3x$ を考えます。任意の ε に対して $\delta > 0$ を $\delta := \dfrac{\varepsilon}{3}$ とします。

すると、$|x - a| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ ならば、$|f(x) - 3a| = |3x - 3a| = 3|x - a| < 3\delta = \varepsilon$ となるので $x \to a$ のとき $f(x) = 3x$ は $3a$ に収束します。

このようにして導くことができます。最後に、はさみうちの原理を証明して終わりたいと思います。

はさみうちの原理

$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ かつ，$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha$ ならば，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \alpha$

＜証明＞

関数 $f(x)$ の極限が $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ であることを $\varepsilon - \delta$ 論法で表すと次のようになる。

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_f > 0 s.t. \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta_f \Longrightarrow \alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon \quad \cdots(1)$

同様に関数 $h(x)$ の極限が $\lim\limits_{x \to a)} h(x) = \alpha$ であることを $\varepsilon - \delta$ 論法で表すと次のようになる。

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_h > 0 s.t. \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta_h \Longrightarrow \alpha - \varepsilon < h(x) < \alpha + \varepsilon \quad \cdots(2)$

このとき正の数 δ を $\delta = \min\left(\delta_f, \delta_h\right)$ と定義すると、
$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ であることと、(1) と (2) から $|x - a| < \delta$ を満たす全ての x に対して
$\alpha - \varepsilon < f(x) \leqq g(x) \leqq h(x) < \alpha + \varepsilon$ が成り立つ。
したがって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$|x - a| < \delta$ を満たす全ての x に対して
$\alpha - \varepsilon < g(x) < \alpha + \varepsilon$ が成立する正の数 δ が存在することが示されたので、
$\lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ である。
＜証明終＞

６．おわりに

　どうだったでしょうか。今まで、なぜそれが成り立つのかを考えないで使っていた人もこれを機に調べてみると面白いかもしれません。今回扱った中では最初のコーシー・シュワルツの不等式の証明がかなり技巧的でした。この方法を知らないと思いつくことが難しい内容だと思われます。しかしながら、こういった証明を一度触れるだけでも記憶のどこかに残り、新たな数学の扉を開くのではないでしょうか。最後の方は少し難しい話となってしまいましたが、皆さんが新たな扉を開くための一助となれば幸いです。

　論理パズル解説 1
さて、ここで適当に考えても頭がこんがらがってしまうだけなので誰が正直者なのか場合わけして考えて見ましょう。
＜ A が正直者である場合＞
　B、C がうそつきとなり、B は正直者である A のことをうそつきだといっているのでうそをついています。しかし、C はうそつきである B のことをうそつきだ、と本当のことをいっています。よって矛盾が生じます。
＜ B が正直者である場合＞
　A、C がうそつきとなり、A はうそつきである自分のことを正直者だ、とうそをつき、C は正直者である B をうそつきだ、とうそをついています。矛盾が生じないので B が正直者となります。
＜ C が正直者である場合＞
　A、B がうそつきとなり、A はうそつきである自分のことを正直者だ、とうそをついています。しかし B はうそつきである A のことをうそつきだ、と本当のことをいっています。よって矛盾が生じます。

A1:B が正直者である。
どうでしたか？ 一つ一つ考えていけば答えが出ますよね！ 論理パズルで重要なのは自分の想像にとらわれずに問題文の条件を見ていくことです。

第 IV 部

分かるようで分からないけど分かった気になる確率の話

1. 確率ってムズいよね…

高等部 1 年　＊＊＊＊

中学生になってから習う数学の概念のひとつに確率がある。もしかしたら中学受験で「確からしさ」として習ったことがあるかもしれない。でも確率ってそもそもなんだろうか？
「サイコロを振って 1 の目が出る」確率を聞けば誰だって「$\frac{1}{6}$ に決まってる」と即答するだろう。では「じゃあなんで $\frac{1}{6}$ だと分かったの？」と聞けばどうだろうか。この質問には少し戸惑ってしまう人もいるかもしれない。しかし少し考えると「サイコロの目はどの数字も同じ確率で出るから $\frac{1}{6}$ なんだ」と言うだろう。ところが「同じ確率で出るってどういう事？」と聞かれると困ってしまう。そもそも確率ってなんだろうか？
ここから分かるように確率を感覚的に捕らえることはなかなか難しい。人間である以上思い込みや経験則といったものが邪魔をしてしまうためだ。今回はあまり難しい議論はせずに確率をすこしでも感じてもらえるような話をしようと思う。（ＩＩ章がいきなり難しいと感じた方は他の章から読むことをおすすめする。難しい計算は飛ばして雰囲気だけでも楽しんでくれたらと思う。）

2. サイコロは 100 回全部 1 が出ることもありうる！？

　サイコロの 1 の目が出る確率は と予想できる。それではサイコロを 100 回振ったら何回くらい 1 の目が出るだろうか？ きっと多くの人は 100 ÷ 6 を計算して 16 回とか 17 回くらいって答える。しかしそれはあくまで予想なので、実際には試さなければ分からない。もしかしたら 10 回くらいしか出ないかもしれないし、20 回も出るかもしれないし、それを見ても、サイコロの 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であると断言できるであろうか。もしかしたら $\frac{1}{6}$ ではなく $\frac{1}{5}$ や $\frac{1}{10}$ と疑ってしまわないだろうか。
ここで実際にそのような $\frac{1}{6}$ から外れる場合について考えてみる。
サイコロを 10 回ふるとすると、たまたま 1 の目が 3 回くらいつまり 3 割ほど出てしまうことは感覚的に起こりそうである。しかし、それを 100 回まで増やしていくと、30 回も 1 が出ることはまずなさそうである。日常生活でもよく言われるように、「まぐれは都合よく何回も起きてはくれない」ということだ。実際に確率を計算してみると、4356 倍ものさがあることが分かる（補足にてこれをきちんと計算してみた）
どちらも 3 割の確率で 1 の目が出るという状況を考えているのだが、ふる回数を増やしていくと、一気に確率が下がってしまう。3 割ではなく 2 割で試してみても同じ、逆に $\frac{1}{6}$ よりも小さい 1 割で考えてみても、同じことが起こる。
それに対し、$\frac{1}{6}$ の割合で 1 の目が出る確率は回数を増やすごとにどんどん上がっていくのだ。実際に 30 回のときよりも 300 回のときのほうが、2 倍実際に起こりやすいのだ。
つまりここから分かるのは、サイコロはふる回数を増やしていくと $\frac{1}{6}$ の割合で 1 の目が出てくる確率が上がっていくということだ。これをしっかりと計算をすると、回数を増やすと確率は限りなく 1 に近づいていくことが分かる。反対に $\frac{1}{6}$ 以外の割合になる可能性は限りなく 0 に近づいていく。

このことを一般的に大数の法則と呼ばれ厳密に証明されている。

今回はサイコロという単純な例を使ったためにアタリマエのことのように思えるが、基本的にどのような現象についてもこの法則が成立することが証明されている。

しかし、これはあくまで確率が分かっているときの話である。もし確率が分かっていなくサンプルしかない場合には適用できない。いきなり確率の話だと難しいので割合から考えていこう。

たとえば街頭調査だ。よくテレビなどで「支持率 45 %」などと紹介されているが、100 人中 45 人が支持すると答えたからと言って、世の中の 45 %の人が支持しているとは限らない。そこである程度の予測をしてみる。ただ単に想像を言うだけだと誰も聞いてくれないので、どれくらい確実かを一緒に書く。今回の場合で言えば「世の中の実際の支持率は 35.4〜54.5 %だろう。この予想は 95 %の確率で正しい」といった具合だ。今回は 100 人にしか聞いていないのであまり確実でないのだが、1000 人に聞いて 450 人が支持すると答えた場合は 41.9〜48.0 %の間に収まる。当然だが、多くの人に聞いたほうが正確な予想をすることが出来る。この範囲のことを信頼区間という。ＴＶ番組ではアンケート調査の結果しか言わないが、こうやって予測することが出来るのだ。

同じことが確率についても言える。クジなどでどれくらいの確率で当たるのかが分からないときに何回も試してみて当たりの割合を調べてみる。そこで先程の信頼区間の考え方を使ってみると実際の確率を予測することが出来る。

まとめてみると、サイコロの問題のように同様に確からしいということが問題文から読み取れる場合ついてはそのまま計算すれば良い。実際に試してみるときれいに $\frac{1}{6}$ にはならないかもしれないが、大数の法則に従って回数を増やすに従って 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ に収束していくことが分かっているため、特に悩む必要はない。確率が分かっていなかったり本当に同様に確からしいのかが不安な場合は実際に何回も試してみるしかない。それでその現象が起こった割合をしらべて確率を予測するしかないのだ。

確率は非常に概念的なものであるため、実際に試した結果とはどうしても誤差が出てきてしまう。それに悩まされることが多くその誤差をどのように処理するかということが統計学という分野で研究されている。

3. ランダムってどんな感じ？

確率においては「任意」という言葉がよく使われる。一言で言えば「ランダム」と言う意味である。「完全に適当に」という風に言うことも出来るだろう。しかし、これが曲者で、なかなか人間には理解しづらいものだ。

例えば「1〜6 の中でランダムに 3 つの数字を選んでくれ」と言われて「1 と 2 と 3」と答える人は少ないだろう。「1,2,3」も「2,3,6」も本来であれば同じはずだけれどもランダムと言われた以上なんとなく、単純なものは避けたほうがいいような気がしてしまうのだ。　これが人間の感覚によるものであればまだ良い。しかし「ランダム」の解釈によって答えが変わってしまう問題というのも存在する。それが「ベルトランの逆説」とも呼ばれる次の問題だ。

『円の中に任意の弦を引いたときにその弦の長さが円に内接する正三角形の一辺の長さより長くなる確率を求めよ。』

少し考えてみて欲しい。まず最初に考えなければいけないのはランダムに、適当に弦を引くというのはどんな感じかということである。

いくつか有名な解法をあげてみよう。ここにあげた以外にも様々な解法があるため考えてみても楽しいかもしれない。

・解法 (1)

適当に直径を取り、その上の一点 A を通り、先程の直径に直交するような弦を取る。

直径の長さを 2 とすると、条件を満たすような点 A を取れる場所の長さは 1 である。よって確率は $\frac{1}{2}$

・解法 (2)

円周上に適当に一点 A を取り、その後円周上に点 B を取り、これらを結んで弦とする。
条件を満たすような点 B を取れる場所は円周の 。よって求める確率は $\frac{1}{3}$

・解法 (3)

円の内側に一点 A を取り、点 A を通り点 A と円の中心を結ぶ直線に直交する線を元図する。条件を満たすような点 A を取れる場所は円の面積の となっている。よって求める確率は $\frac{1}{4}$

・解法 (4)

円周上に一点 A を取り、点 A を通る直径の反対側の端を点 B とする。点 B を通る円の接線上に点 C を取る。A と C を結びできた線分を弦とする。すると条件を満たすような点 B を取れる場所は有限であるのに対し、満たさないような点 B の場所は無限にあることになる。よって求める確率は 0。ちなみにこの考え方を応用すると確率が 0 から 1 までのすべての値を取ることが可能になってしまう。

この 4 つの中にはぱっと思いつかないようなこじつけ的なものもある。しかし「任意の弦」という言葉は「1〜6 の中でランダムに数字を選ぶ」などという言葉に比べて曖昧であるため、任意に選ぶ方法を考えなければならない。その中で弦の「中心」に着目するか、「両端」に着目するかというようなものによって問題が全く変わってきてしまう。解法 (3) は弦の中心に関しては確率分布が一様になっているが、両端に関してはそうなっていない。解法 (1) は弦の中心と円の中心の距離に関しては確率分布が一様だが、弦の中心そのものについては一様ではない。ある意味一長一短的な感じだ。

基本的にはこのようなことで悩む必要はない問題が多いのだが、ものによっては観点・解釈によって条件が変わってしまう問題もあることに注意すべきだ。

（おまけ）

このように書くと、じゃあ結論は何かと気になる人がいるかも知れない。「床に円を書いてそこに藁のような細い棒を落としたらどうなるのか？」という疑問も出るかも知れない。そういったときは是非試してみるべきだ。厳密性は失われてしまうが、先程の解法 (4) のように感覚とかけ離れた答えではなく、感覚的に理解しやすいものが得られるだろう。その過程で「ランダム」から離れたやり方であることに気づけばまた修正を加えていく。そうすると次第に納得のいく結果が得られるかもしれない。まさに「測定なくして確率なし」である。

ちなみに数学的にも様々な考察がされている。当然答えが一つに定まらないというのが結論なのだが、一番合理的なものは何かということが議論されることもあるのだ。簡単に言えば突飛な特殊ルールを付け加えないで他の問題にも通じるような解法を考えるのだ。気になった人は「ベルトランの逆説」で検索したり本で調べてみてほしい。

4. 感覚とかけ離れた期待値

確率が世の中でそのまま役に立つことは思ったよりも少ない。降水確率などで利用されているが、そこまで多くはない。むしろ期待値と結びつけて考えられることが多い。ただ単に確率を考えるより、利益とどれくらい起こりそうかということを加味していくつかの選択肢から最適なものを選ぶという場面は非常に多いだろう。しかし、その期待値も時として人間の感覚とはかけ離れてしまう。

例えば「必ず 8 万円もらえる」と「85 ％の確率で 10 万円がもらえるものの残りの確率で 0 円になる」のとではどちらが良いだろうか…？ 期待値を考えてみると後者は 0.85 × 10 万円＝ 8.5 万円ということで後者のほうが良

いはずである。しかし実際には前者を選択する人のほうが多いだろう。人間はリスクを回避したいという感情が強い。

もちろん期待値が人間の感覚と一致する例も多い。例えば「50 %の確率で 10 万円もらえ、50 %の確率で 6 万円もらえる。参加費は 6 万 5 千円」このときの期待値は 8 万円であり、参加費よりも高い。実際にこのかけをやりたいと思う人は多いのではないだろうか。あくまで最初の例のように感覚とずれてしまうときもあるのだが、役に立たないわけではない。計算結果が感覚とずれないことも多いし、迷ったときに選択を合理的にする一つの指標となることは間違いない。

では次のような不思議な状況ではどうだろうか。

コインを裏が出るまで投げ続ける。そして表が連続で出た回数を数える。一回だけ表が出て、次に裏が出た場合は２円、二回連続で表が出て、次に裏が出てしまった場合は４円、三回連続で表がでて、次に裏が出た場合は８円、n 回連続で表が出て次に裏が出た場合は 2^n 円を獲得できる。あなたはこのゲームはいくらの参加費が妥当だろうか？

この場合も先程と同じようにとりあえず期待値を計算してみよう。

$$2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{8}+\cdots+n\times\frac{1}{n}+\cdots=1+1+1+\ldots 1+\cdots=\infty$$

答えが無限大に発散してしまっている。つまり、期待値無限ということで参加費用がどれだけ高くともこの賭けに参加するべきだということだ。たとえ参加費用が 1 億であったとしても。

そんな事がありうるだろうか？ 少なくとも僕だったらこの賭けの参加費用が 100 円を超えていたら絶対にやらない。おとなしくジュースでも買ってきたほうがマシだからだ。これを読んでいる皆さんはどう思うだろうか？10 円以上だったら乗らないという人がいてもおかしくないと思う。

もし時間があれば友達と試しても面白いだろう。ただそれで 20 回位表が出続けて 10 万円ほど支払うことになって、友達と喧嘩になるかもしれないのでお金を実際にかけることはおすすめしない。

これはサンクトペテルブルクのパラドックスと呼ばれる有名な話である。多くの人がこのへんな状況をなんとかする解決策を探してきた。

まず現実的に考えてみよう。なぜ期待値が無限大になったかと言うと、このゲームが何回コインを投げるのかという限度がないためだ。裏が出ない限り永遠と投げ続けなければいけない。そしてその間賞金は 2 倍に増え続けていく。10 回表が出ると 1024 円、20 回表が出ると 1048576 円、30 回表が出ると 1073741824 円と 10 億円にもなってしまう。つまり 40 回を超える頃にはその賞金を払うことが出来る人などいなくなってしまうのだ。そこでコインを投げるのは最大で 40 回という設定をつけると期待値 40 円。1 兆円を超える額をもらえるかけが 40 円で出来るのであればやってみてもいいかなと言う気になる。もちろん 1 回めで裏が出て 40 円の損になる可能性もあるのだが。

それから金額が倍になっても人間の満足度は 2 倍にならないということがある。5000 円が 1 万円になると嬉しいが、500 億が 1000 億になっても実感がなく純粋に喜べないかもしれない。すでに持っているお金が増えるほど、更にお金が増えたときの満足度が下がってしまうのだ。殆ど持っていなかったときは所持金が増えるとすごく嬉しいが、お金持ちになっていくとその喜びは薄れていく。お金をもらい続ければずっと幸せでいられるかと言うとそうでもないのだ。このことを数学の計算として使う。よく使われるのは金額の対数をとったものを人間の満足度とするものだ。単純な金額の代わりに満足度を考えて期待値を計算すると無限に大きくなるわけではなく 1 つの値に収束する。こうして考えればいくら高い参加費を払ってでも参加すべきなどという馬鹿げた結論は回避できる。

他にも期待値そのものの問題点を考えることもある。期待値はあくまで「平均」を表している。何の平均かと言うと、その試行を何回も繰り返したときの利益の平均だ。つまり、期待値を考えたときに「必ず儲かる」という結論が出たとしてもそれは「何回も繰り返せば」という条件がついてくるのだ。最初の「85 %の確率で 10 万

円がもらえるものの残りの確率で 0 円になる」ということでも何回も繰り返せば「かならず 8 万円もらえる」よりも儲かることは確実だ。この賭けが何回も繰り返される状況であれば、期待値を信頼するべきだろう。しかし実際にはこうしたことは一回限りであることも多い。その場合はリスクを回避するほうが人間的で合理的な選択かもしれない。サンクトペテルブルクのパラドックスも同じで、何回も繰り返せば毎回どんなに高い参加費をとられてもいつか元が取れる。しかし 1 回限りの場合は殆どの確率で数円しかもらえない。まともな額をもらえるのはそうとう低い確率となってしまう。そう考えると高い参加費を出したくないというのは当たり前のようにも思える。

ただ単純な平均を計算しているにすぎないため、とてつもなく低い確率で得られる大きな利益をただ掛け合わせるだけで表現してしまう。「リスクは回避したい」「あまりにも起こる可能性が低いことは考えない」という人間らしい試行とはかけ離れてしまうときもあるのだ。期待値は世の中の様々な場面で使われているが万能ではないため、過信するべきではないということは覚えておくべきだろう。

5. 確率とどう向き合うべきか

ここまで確率に関わるいろいろな概念が人間にとっては捉えにくいということを書いてきた。数学の歴史は 2000 年以上あるのに対し、確率が生まれたのは 300 年ほど前であるということからも、確率は受け入れるのが難しいということが分かる。これは逆の見方をすると人間の感覚は不完全で曖昧だからそれを補い、合理的に考える指標としてこれらの考え方が生まれたということでもある。

ただそれはあくまで計算にすぎない。確率という不確かなものを扱っている以上、誤差が出るのはしょうがないし、時には計算された値とは大きく異なる偏った結果が得られてしまうこともある。「ランダムに」という言葉も人によって解釈が違って結果が変わってしまうこともある。期待値を使って合理的な判断をしようと思っても、人間的な判断とは大きく異なった結論が得られることもある。確率の考え方は常に万能というわけではない。

それでも確率の考え方を知っているのと知らないのとでは全く違う。実際宝くじなどでは当たる確率はかなり低いにもかかわらず「今回だけは当たりそうな気がした」といって大金を注ぎ込んでしまうことがある。確率を知っていればどれだけ低い確率であり、宝くじの値段に対して期待値がどれくらいであるかということを理解できる。そうすれば無駄遣いも少しは抑えられるかもしれない。

人生には非常に多くの選択がある。そのときに確率が「一つの道具」として選択を助けてくれるかもしれない。しかし、それだけでは決めきれない。安全策を取るのかチャンスを掴みに行くのかを決めるのは他の誰でもない自分自身である。

論理パズル解説 2

Q2:ひとつの花束がありました。その花束から二本抜き取ったらすべてが赤い花、違う二本を抜き取ったらすべてが白い花、また違う二本を抜き取ったらすべてが青い花になるという。これはどんな花束？

この問題こそ自分の想像にとらわれないことが重要になる問題といえるでしょう。花束といえば皆さん花がたくさんあるものを想像しますよね。それに問題文には「すべて」とあり、なんとなく花の数が多そうです。そう、そこに引っ掛けがあるんです。花の数が 3 本であったとしても、それはあわせれば花束ということができますよね。つまり、答えは赤、白、青の花が 1 本ずつ入った花束でした。これならほかの 2 本を抜き取れば残った 1 本の色に「すべて」なりますよね。

A2:赤、白、青の花が 1 本ずつ入った花束

第二問の答えには驚いた人も多かったのではないでしょうか？ 問題文の条件を整理していけばどんなに驚く答えでもそれ以外に可能性がなければただひとつに答えは決まります。問題文を紐解いていくことが大切です。

第Ⅴ部

細胞レベルで数学してる？

〜ディープラーニングと数学〜

高等部２年　＊＊＊＊

まえがき

タイトルの割にはしばらく数学あんまり関係ない話をします。
科学が発達した現在、「人工知能 (AI)」という言葉を聞いたことのない、という人はいないのではないか。人工知能で多くみられる仕組みをとても簡単に説明すると、大量のデータを読み込み、条件と結果の関係を導き出し、次の条件が与えられたときにその結果を予測する、というものである。

現在の人工知能研究の主流は「機械学習」と呼ばれるものである。これは、与えられた条件と結果との因果関係を自分で導き出す、というものである。この過程が「学習」と呼ばれるものであり、機械自身が学習を行うため「機械学習」と呼ばれる。

私は情報科学の分野に興味を持っているが、今回数研の部誌を書かないかと誘われ、数学的な話題性にも富んでいることもあり、この記事を執筆するに至った。

1. ディープラーニングとは？ ニューラルネットワークとは？

主流である機械学習の中でも特に最近大きな注目を集めているのが、「深層学習 (ディープラーニング)」と呼ばれる手法である。2012 年にこの方法が成功を収めて以来、人工知能の予測の正確性は格段に向上した。

では、そのディープラーニングという手法はどのようなものなのであろうか。答えは簡単で、人間の脳の構造を機械で再現した、というものである。人間の脳は多くの神経細胞からなっており、それらはニューロンと呼ばれる。その構造を再現したのが「ニューラルネットワーク」と呼ばれるものである (図 1)。

これを見ると、細胞の周りに、樹状突起と呼ばれる突起があり、また細胞から 1 本の軸索と呼ばれる棒のようなものが出ている。軸索の先端部は枝分かれしている。その先はまた別の細胞の樹状突起に繋がっている。

この部分は電気信号を流すのに使われる。そして、この電気信号の伝達の仕組みこそが、ニューラルネットワークの仕組みであり、ディープラーニングの鍵である。

コンピューター上でこれを再現するニューラルネットワークでは、樹状突起に電気信号が入ってくることを「入力」、軸索を介し電気信号を出すことを「出力」という。

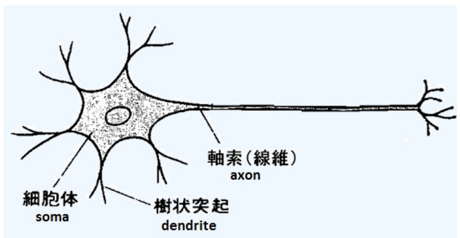


図　1 脳の神経細胞
http://www.tamagawa.ac.jp/teachers/aihara/kouzou.html　より 18/9/5 引用

軸索の先は別の樹状細胞に繋がっている、と書いたとおり、人間の脳もコンピューター上でも、1 つのニューロンのみではニューラルネットワークは成立しない。ニューロンは階層上に並んでおり、1 つの層にも複数のニューロンが並列して並んでいる (図 2)。

2. 信号伝達の仕組み

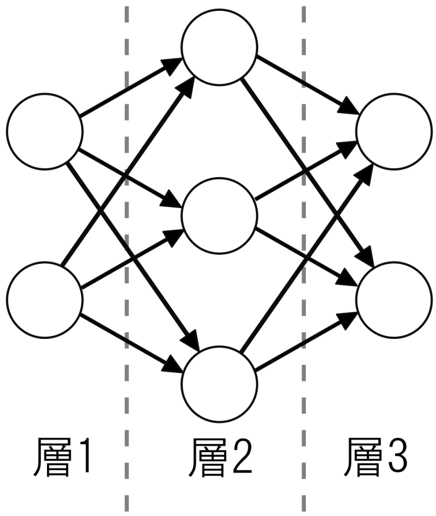


図 2　ニューラルネットワーク

読者の皆さんは、コンピューターと言えば 0 か 1 かの電気集合が無数に集まってできている、と思っている方がいるかもしれない。確かにそれは間違いではない、いやむしろ大正解なのであるのだが、脳細胞やニューラルネットワークはそれだけでは終わらない。　このアルゴリズムの中では、データに「重要性」がつけられる。例えば、顔認識の AI を作る場合は、カメラで得られた画像のうち人の顔の部分のみが重要なのであって、背景の部分は全く関係ない。このように、どのニューロンからの情報が重要か、というシステムを再現するのに、ニューラルネットワークは入力の重みという概念で対処している。

電気信号の出力も、常に電気信号を出していては意味がない。そこで、情報の重要さの合計によって出力するか否かを決める。さて、ここまで全くといっていいほど数学の話題に触れてなく、ほとんど生物と情報の話になってしまった。ここでようやく数学らしい数式の登場だ。

今、n 層目の任意のニューロン a の入力と出力について考える。n 層目の任意のニューロンには、$n-1$ 層目のすべてのニューロンからの軸索がつながっている。$n-1$ 層目のニューロンの個数を k 個とし、各ニューロンから a への出力の状態を $x_1, x_2, \ldots, x_k$ とする。また、それぞれの入力に対する重みを $w_1, w_2, \ldots, w_k$ とすると、重みの合計

$$s = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i$$

となる。

値が出たので次は、それが電気信号の 0 に相当するものか 1 に相当するものかを考えなければならない。ここで、「重要な情報を受け取ったら電気信号 (=1) を出力、あまり重要でなければ電気信号を出さない (=0 を出力)」ということを考える。こうすることで、最終的に重要な情報を取り出すことができる。そのためには、受け取った情報が重要かどうかの基準を設けなければならない。この値を閾値 (しきいち) という。

判断基準である閾値を θ とする。出力値を関数として定義し、$f(s)$ とすると、

$$f(s) = \begin{cases} 1 & (s-\theta \geqq 0) \\ 0 & (s-\theta < 0) \end{cases}$$

となる。これはステップ関数と呼ばれるもので、不連続性を持つものであるが最も脳細胞の働きを正確に再現している。ちなみにここでの $f(x)$ を活性化関数という。

3.　シグモイド関数

ステップ関数は脳細胞の仕組みを正確に再現してはいるものの、コンピューター上で再現するのにはいくつか不都合な面がある。例えば、ステップ関数はその不連続性故に微分不可能であり、それは次元を落とすことができないことを意味する。そこで、ステップ関数と似た形状であるシグモイド関数が使われる場合がしばしばある。シグモイト関数は、

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

の式で表わされ、グラフは右下の図 3 のような形状となる。

これを見ると分かるとおり、シグモイド関数はステップ関数とほぼ同じような形状・機能を持ちながら、連続性を持っている。シグモイト関数を用いると出力は 0 か 1 の 2 つだけの状態とはならない。出力値を p とすると、$p = \sigma(s - \theta)$ となる。

コンピューターも人間も電気信号で情報処理を行っているが、人間は脳の構造自体がニューラルネットワークの様になっているのに対し、コンピューターは構造自体はニューラルネットワークではないが、そこに仮想のニューラルネットワークを構築している、と見なせる。そのため、電気信号を ON-OFF の 2 通りだけで表わす必要がないため、このようにステップ関数をシグモイド関数に置き換えて論じることができる。

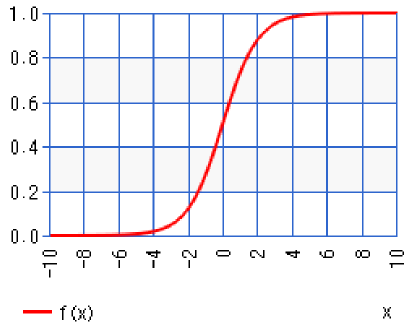


図 3 https://keisan.casio.jp/exec/system/1180917567 を利用して、 2018/9/6 作成

4. ReLU

シグモイド関数により、機械に適したニューラルネットワークを作ることができた。と思うかもしれないが、5 章で説明する誤差逆伝播法にこの方法は残念ながら適していない。機械でのニューラルネットワークは脳のそれとは違い、ニューロンの興奮度 (それが受けた電気信号の強さ) をそのまま値として送ることができる。このメリットを生かしたのが ReLU(Rectified Linear Unit) である。機械でニューラルネットワークを再現する場合値を 0 と 1 の間に収める必要はない。ただし、ニューラルネットワークの閾値の存在意義は「どうでもいい情報を切り捨て、必要な情報を持っているかを判断する」というものである。もしここで $s - \theta$ が負になってしまった場合は、必要な情報が打ち消されてしまいかねない。つまり、値が負になることは許されないわけである。

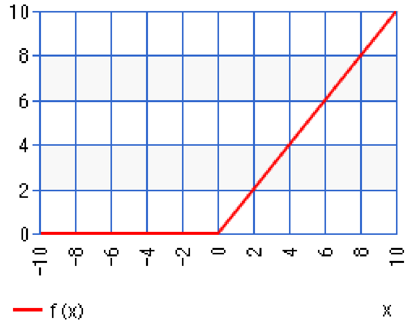


図 4 ReLU https://keisan.casio.jp/exec/system/1180917567 を利用して、 2018/9/7 作成

以上の条件を満たすことを考えられた ReLU は、次のような式で表せる。

$$f(x) = \max(0, x)$$

つまり、機械学習のニューロンの活性化関数に ReLU を用いた場合の出力は、

$$f(s) = \max(0, s - \theta)$$

となる。

ReLU は $x = 0$ のとき、ステップ関数と同様に微分不可能である。しかし、信号の重要度が関数の傾きに左右されずに出力されるので、シグモイド関数を用いるときに比べてメリットの方が大きいとされている。

また、ニューラルネットワークの出力層では、出力の最大値がない、ということが問題になってくる。出力層は基本的には各条件に対して信号を受信したか否かで情報を表すので、そこにはシグモイド関数などが用いられる。

5.　目的関数と誤差逆伝播法

1〜4 でディープラーニングの下準備が整ったので、次は学習の話をしよう。ディープラーニングでは、「教師あり学習」と呼ばれる手法が最も採用されている。これは、あらかじめ入力データとそれに対応する正解をセットにして学習させる、という手法である。この場合、入力データに対する予測と正解の誤差を最も少なくするように、ということを目的として計算が行われる。このように、最終的に目的となる数値のことを目的関数という。例えば xy 平面上のグラフに複数のデータの点があり、それらに最も近いように 1 本の直線を引く時の目的関数は、直線の式を $f(x)$、データの個数を n, 各を

$$(x_1, y_1)\ldots(x_n, y_n)$$

とすると、

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2$$

つまり平均二乗誤差である。

ディープラーニングでよく用いられるのが、誤差逆伝播法と呼ばれる方式である。これは、入力データから推測した値と正解の値に誤差が生じた場合に、出力層に繋がるノードの重みを変化させ、さらにそのノードの先のニューロンに繋がるノードの重みを・・・という風に連鎖的に値を変えていき、最終的に誤差が最も小さくなるような値を見つける、という手法である。

この方法の問題点として、勾配消失問題というものが挙げられる。シグモイド関数を思い出してみると、x が 0 から離れるほど、同じ Δx に対する Δy の値は小さくなる。これはつまり、重要度の高い情報を受け取っているニューロンの重みが更新されにくくなっていることを意味する。これを回避するために考案されたのが 4 章で取り上げた ReLU である。

6.　あとがき

今回この記事を書いたことにより改めて、自分の興味のある情報科学と数学の分野は密接にかかわっている、ということを感じることができたと思う。これから AI はますます発達し、社会はより便利になっていくと思われるが、それを支えているのは実は数学でもある、ということを知っていると数学に対するまた新たな見方をすることができるかもしれない。

また、脳細胞はステップ関数が活性化関数でありながら、(現在のところは) 概ねコンピューター以上の判断能力を持っている。その仕組みについても興味を持たされるところである。

最後までお付き合いいただきありがとうございました！

・参考文献/参考サイト

「フリーライブラリで学ぶ機械学習入門」　堅田洋資・菊田遥平・谷田和章・森本哲也　秀和システム、2017 年

「Excel でわかるディープラーニング超入門」　涌井良幸・涌井貞美　技術評論社、2017 年

「関数 f(x) の描画 - 高精度計算サイト」
https://keisan.casio.jp/exec/system/1180917567 より
2018(平成 30) 年 9 月 5 日および同年 9 月 6 日閲覧

第 VI 部

四元数の世界

高等部 2 年　＊＊＊＊

四元数!?

はじめまして．部長です．今回は四元数というテーマなのですが，けっこう苦戦しました．どこが大変だったのかを言うと，計算がめんどくさい　扱いづらいという，ところです．まず簡単に四元数がどんなものか説明しますね．

普通の数（実数）・・・数直線上のどこかにある　次にこれのスーパーバージョンが作られました．
複素数・・・数直線上にない数　$\square \times \square = -1$ になるような数も作った！（i という記号を使います．）
四元数・・・複素数のスーパーバージョン　もはやわけがわからない...
という感じです．まだよくわかりませんね．とにかく不思議な，そして普段の生活では絶対に出てこない数なんです．それから，わけがわからない！ と思った方は眺めてきれいなところを探してみてください．ちなみに最後にしょぼいパズルコーナーがあります．

複素数

複素数

複素数のお話をしましょう．先ほど，2 回かけて -1 になる数 i というものがあります．これを虚数というんですが，これと実数を組み合わせて複素数というものを考えます．簡単に言うとこんな感じです．

複素数王国では，数字を「りんご□個 + みかん○個」で考えます．
〜〜ルール〜〜
足すときはそのままそれぞれを足すことができます．
かけ算（魔法）は，みかん 1 個×みかん 1 個＝りんご-1 個
えっ，わかりづらい??

複素数は $a+bi$ という形で表すんです．
$\alpha = a+bi, \alpha' = a'+b'i$ として，複素数の加減乗除は以下のようになります．

$$\alpha \pm \alpha' = (a+a') \pm (b+b')i\ ,\ \alpha\alpha' = (aa'-bb') + (ab'+a'b)i$$
$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{a'+b'i}{a+bi} = \frac{(a'+b'i)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(aa'+bb')+(ab'-ba')i}{a^2+b^2}$$

で，このようなルールを決めたんですけど，このときに普段どおりに交換法則やら結合法則やらが成り立ちますよ，という証明です．（正確にはもう少しいろいろ条件があります．）
$\mathbb{C}$ は体である．
（証明）
$\alpha = a+bi, \beta = c+di, \gamma = e+fi,\quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ として，

$0+\alpha=0+\alpha=\alpha$
$\alpha+(-a-bi)=(-a-bi)+\alpha$
$\alpha+(\beta+\gamma)=a+bi+((c+e)+(d+f)i)=(\alpha+\beta)+\gamma=((a+c)+(b+d)i)+e+fi=(a+c+e)+(b+d+f)i$
$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i=\beta+\alpha=(c+a)+(d+b)i$ より，$\mathbb{C}$ は加法について可換群.
$(\alpha\beta)\gamma=((ac-bd)+(ad+bc)i)(e+fi)=(ace-bde-bcf-adf)+(bce+ade+acf-bdf)i=$
$\alpha(\beta\gamma)=(a+bi)((ce-df)+(cf+de)i)=(ace-adf-bde-bcf)+(bce-bdf+ade+acf)i$
$1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha$
$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i=\beta\alpha=(c+di)(a+bi)=(ca-db)+(cb+da)i$
$\alpha(\beta+\gamma)=(a+bi)((c+e)+(d+f)i)=(a+bi)((c+di)+(e+fi))=(a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi)$
$\alpha^{-1}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}i\in\mathbb{C}$ とすると $\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=1$（$\alpha\fallingdotseq 0$）

複素数の共役，絶対値

共役というのはおともだちみたいな感じの数ということなんですが，$\alpha=a+bi$ と共役な複素数を $\bar{\alpha}=a-bi$ と決めるんです．このとき $\alpha=a+bi, \beta=a'+b'i$ として，
$\alpha+\bar{\alpha}\in\mathbb{R}$，$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ ，$\overline{\alpha-\beta}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}$ ，$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}$ ，$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ ，$\bar{\bar{\alpha}}=\alpha i$，という性質が成り立ちます.

また，複素数 $\alpha=a+bi$ の絶対値を $|\alpha|=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}=\sqrt{a^2+b^2}$ と定めると，
$|\alpha|=0\Longleftrightarrow\alpha=0$，$|\bar{\alpha}|=|\alpha|=|-\alpha|$ ，$\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2$ ，また，$\beta=a'+b'i$ として
$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ ，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$（$\beta\fallingdotseq 0$），$|\alpha|-|\beta|\leqq|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|$ となります.

四元数

四元数

複素数の拡張（スーパーバージョン）がいよいよ登場です．
これは四元数（ハミルトン数）と言って，$a+bi+cj+dk(a, b, c, d$ は実数$)$ という形の数です．
ここまで来るともうわけがわからなくなりますね・・・．で，この四元数について足し算やかけ算を考えるんです．四元数の足し算は以下ようになります．
$\alpha=a+bi+cj+dk$，$\alpha'=a'+b'i+c'j+d'k$ として，

$$\alpha+\alpha'=(a+a')+(b+b')i+(a+a')j+(b+b')k$$

かけ算は $i^2=j^2=k^2=-1, ij=-ji=k$ という定義のもと、以下のようになる。

$$\alpha\alpha'=(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-c'd)i+(ac'+ca'-bd'+b'd)j+(ad'+da'+bc'-cb')k$$

また，$ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j$ となる.

四元数の行列記法

次に四元数を行列記法を用いて表します．行列は $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ のような形をしていて，足し算やかけ算をすることができます．

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$ という感じです・・・

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ とすると，

$$I^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E$$

$$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E$$

$$IJ = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -JI = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = K$$

$$JK = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = -KJ = -\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = I$$

$$KI = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -IK = -\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J$$

となる．

次に一般の四元数を行列記法で表す方法を考えるが，ここで $z = a + bi, w = c + di$ とすることで，$\alpha = a + bi + cj + dk = z + wj$ と表せる．そして行列は $A(\alpha) = \begin{bmatrix} z & iw \\ i\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & -d+ci \\ d+ci & a-bi \end{bmatrix}$ を対応させる．

（別の表記にすれば $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ である．）これと E, I, J, K の定義より任意の $A(\alpha)$ は，

$$A(\alpha) = aE + bI + cJ + dK \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

の形で表せることがわかる．

四元数全体の集合 Q は，非可換体である．

（証明）

加法については複素数と同様に計算が可能なので可換群であることは自明．

乗法の結合法則と分配法則も複素数と同様に成立．

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ より乗法単位元は 1

$ij = -ji$ より $ij \fallingdotseq ji$．乗法の交換法則は成立しない．

よって Q は，非可換体．

四元数の共役，ノルム

複素数の共役，絶対値の性質を確認したので，ここでも確認します．先ほどの複素数の共役，ノルムと比べてみてください．この辺の証明も面白くないのですっとばします．
$x = a + bi + cj + dk$ に対して $\bar{x} = a - bi - cj - dk$ とすると，
$x = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ の共役は，$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ より，$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix}$
$x + \bar{x} \in \mathbb{R}$ $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ $\overline{x-y} = \bar{x} - \bar{y}$ $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ だいたい複素数と同じなのですが，最後の積に違いがありますね！

また，$x = a + bi + cj + dk$ のノルムを $||x|| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ と定義すると，
$||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ $||\bar{x}|| = ||x|| = ||-x||$ $\left|\left|\dfrac{x}{y}\right|\right| = \dfrac{||x||}{||y||}$ （$y \neq 0$）$||x|| - ||y|| \leqq ||x + y|| \leqq ||x|| + ||y||$
$||xy|| = ||x||\,||y||$ これは複素数と同じだあ！

四元数と回転

三次元のベクトルとロドリゲスの回転公式

この先は四元数が実は空間（３次元）での回転で使えるんだぜ！ ということを示していきます．
空間のベクトルを考え，$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ とする．このとき内積 $a \cdot b$ と外積 $a \times b$ は，

$$a \cdot b = \langle a, b \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \quad a \times b = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

となる．

ロドリゲスの回転公式

空間で回転させるときの点を，ベクトル（上に矢印が付いているやつ）を使って求められる公式です．
$\vec{a}$ を単位ベクトルとして，任意の点 P を $\vec{a}$ の周りに θ だけ回転した点を P' とする．また，P の位置ベクトルを $\vec{p}$，P' の位置ベクトルを $\vec{p'}$ とおく．このとき $\vec{p'}$ は

$$\vec{p'} = \vec{p} + \sin\theta(\vec{a} \times \vec{p}) + (1 - \cos\theta)(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{p}))$$
$$\vec{p'} = \langle \vec{a} \times \vec{p} \rangle \vec{a} + \sin\theta(\vec{a} \times \vec{p}) - \cos\theta(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{p}))$$
$$\vec{p'} = \cos\theta\vec{p} + \sin\theta(\vec{a} \times \vec{p}) + (1 - \cos\theta)\langle \vec{a}, \vec{p} \rangle \vec{a}$$

と表せる．（証明は省略する．）

四元数と回転

先ほどの回転公式（3 つ目）が四元数の積 qpq^{-1} に対応していることを示します．
（証明）

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$，$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ とし，$\Re(p) = p_0, \Im(p) = p_1 i + p_2 j + p_3 k, \Re(q) = q_0, \Im(q) = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ とする．

$qpq^{-1} = q(p_0+p_1i+p_2j+p_3k)q^{-1} = \dfrac{1}{|q|^2}q(p_0+p_1i+p_2j+p_3k)\bar{q} = p_0+\dfrac{1}{|q|^2}(p_1(qi\bar{q})+p_2(qj\bar{q})+p_3(qk\bar{q}))$

ここで，$K = p_1(qi\bar{q}) + p_2(qj\bar{q}) + p_3(qk\bar{q})$ とおくと，

$K = p_1(qi\bar{q}) + p_2(qj\bar{q}) + p_3(qk\bar{q})$

$\quad = p_1((q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)i+2(q_0q_3+q_1q_2)j+2(-q_0q_2+q_1q_3)k)+p_2(2(-q_0q_3+q_1q_2)i+(q_0^2+q_1^2+q_2^2-q_3^2)j+$

$\quad\quad 2(q_0q_1 + q_2q_3)k) + p_3(2(q_0q_2 + q_1q_3)i + 2(-q_0q_1 + q_2q_3)j + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)k)$

$\quad = (q_0^2-(q_1^2+q_2^2+q_3^2))(p_1i+p_2j+p_3k)+2(p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3)(q_1i+q_2j+q_3k)-2q_0((p_2q_3-p_3q_2)i+$
$(p_3q_1-$

$\quad\quad p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k)$

したがって，

$$qpq^{-1} = \Re(p) + \frac{1}{|q|^2}((\Re(q)^2 - |\Im(q)|^2)\Im(p) + 2\langle\Im(p), \Im(q)\rangle\Im(q) - 2\Re(q)(\Im(p)\times\Im(q)))$$

次に p, q を $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$, $q = \cos\phi + \sin\phi(a_1 i + a_2 j + a_3 k)$ とおく．（ただし，$p_n, a_n \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi), a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$）これより，

$|q| = 1, \Re(p) = 0, \Im(p) = p_1 i + p_2 j + p_3 k, \Re(q) = \cos\phi, \Im(q) = \sin\phi(a_1 i + a_2 j + a_3 k) = \sin\phi\Im(a)$

$qpq^{-1} = (\cos^2\phi - \sin^2\phi)\Im(p) + 2\sin^2\phi\langle\Im(p), \Im(a)\rangle\Im(a) - 2\cos\phi\sin\phi(\Im(p)\times\Im(a))$

$\quad = \cos 2\phi\Im(p) + (1-\cos 2\phi)\langle\Im(a)\times, \Im(p)\rangle\Im(a) - \sin 2\phi(\Im(p)\times\Im(a))$

$\quad = \cos 2\phi\Im(p) + \sin 2\phi(\Im(a)\times\Im(p)) + (1-\cos 2\phi)\langle\Im(a), \Im(p)\rangle\Im(a)$

$\vec{p'} = \cos\theta\vec{p} + \sin\theta(\vec{a}\times\vec{p}) + (1-\cos\theta)\langle\vec{a}, \vec{p}\rangle\vec{a}$ と比較すると，$\theta = 2\phi, \Im(p) \to \vec{p}, \Im(a) \to \vec{a}$ という対応をさせると同値な式になる．

これにより，$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を回転軸の方向ベクトル，$\vec{a}$ の向きに右ねじが進む向きに θ だけ回転させたあとのベクトルを表す四元数 b は $b = qaq^{-1} = qa\bar{q}$ で求められる．（$q = \cos\dfrac{\theta}{2} + (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\sin\dfrac{\theta}{2}$, $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{||q||^2} = \bar{q} \because |q| = 1$）

四元数を用いると回転の合成が，四元数の積に対応するので計算が楽になります．

$p(qa\bar{q})\bar{p} = (pq)a(\overline{pq})$

四元数と回転～利用編～

「unity」という３Ｄゲームを作れるソフトがあるんですが，そこでプログラムを書いて，いろいろな動きをさせます．で，物をぐるぐる回転させるときに，なんと四元数が使われているのです！

下の画像は「unity」で四元数（Quaternion．…の部分）を使った簡単なスクリプト（プログラム）を書いたものです．

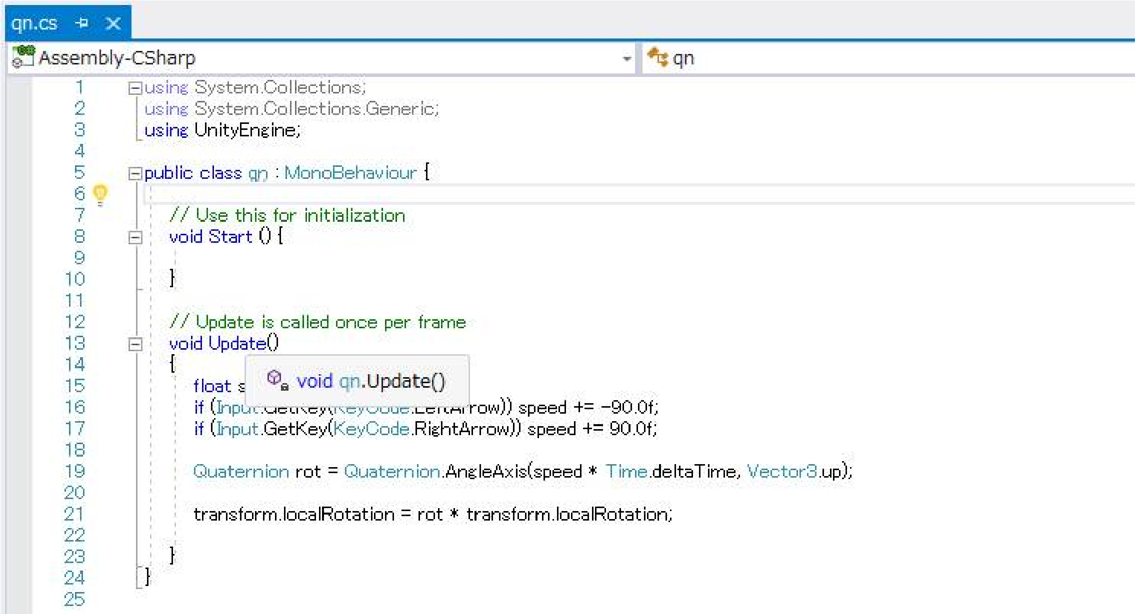


図１　Ｃ＃でのスクリプト（Visual Studio）

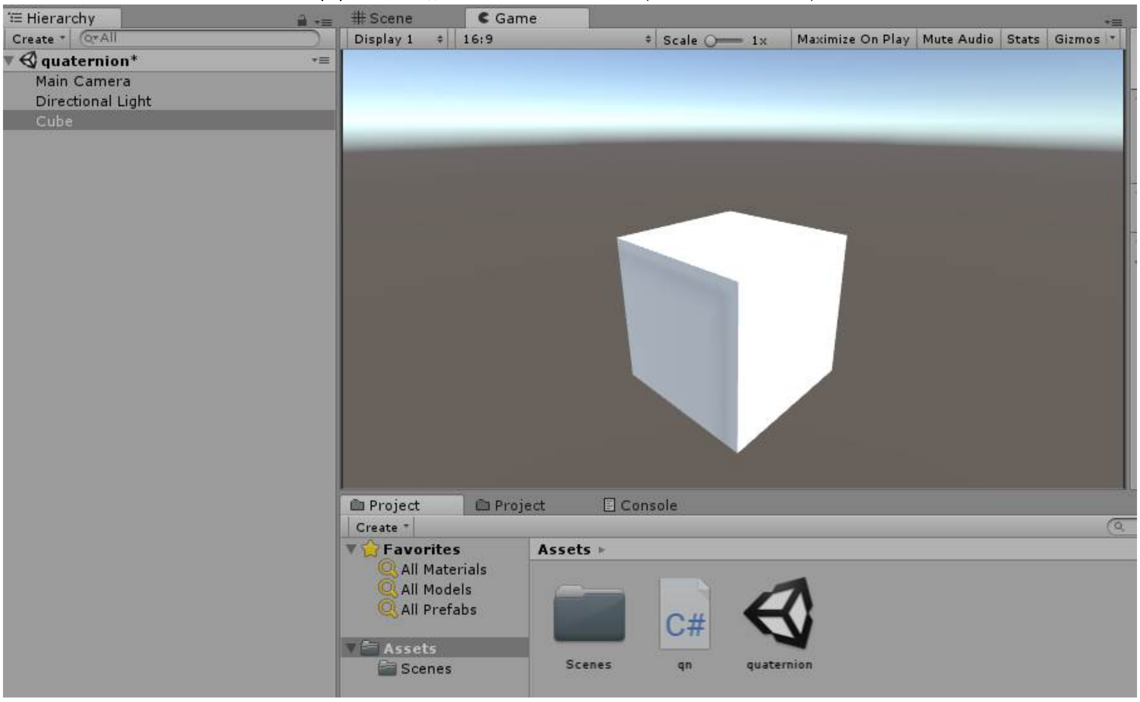


図２　unity 実行中の画面．左右の矢印キーで立方体が y 軸まわりの回転をする．

「unity」では，内部で四元数の計算が行われているため，実際に $a+bi+cj+dk$ のような表現を使うことは基本的にはないです．

おわりに

四元数自体は高校では学ぶことはないのですが，講座で勉強した線形代数（特に行列）やベクトル，複素数が非常に役立ち，面白かったです．今回証明に触れることのなかったロドリゲスの回転公式については，勉強してみたいと思いました．

参考文献

松坂和夫　代数系入門　岩波書店

上野健爾　現代数学への入門　代数入門　岩波書店

砂田利一　現代数学への入門　行列と行列式　岩波書店

志賀浩一　群論への 30 講　朝倉書店

今野紀雄　四元数　森北出版株式会社

部長のパズルコーナー！

魔方陣をうめてください．縦横斜めの和がどこでも同じになるようにします．

8		10
	7	

図 5　第 1 問

13	10		
9			
		18	17
		6	5

図 6　第 2 問

というわけでさらに！

第 VII 部

魔方陣について

高等部 1 年　＊＊＊＊

魔方陣とは

　正方形の中にルールに基づいて数字が配置されているものをいう。
そしてそのルールとは、横、斜め、でそれぞれ数字を足しそれらがすべて同じ数にならなければならないというものだ。しかし数字は何でもよい。
また、1 × 1 2 × 2 の魔方陣はなく最小のものは 3 × 3 である。

魔方陣の起源

　起源は古く中国最初の王朝夏の始祖が洛中の治水工事をしたときに川の中からでてきた大きな甕に刻まれた文様であると伝えられ長年風水や気学などに用いられた。他の対称形に、西洋数秘術の「サトゥルヌス魔方陣（土星方陣)」などがあります。サトゥルヌスとは英語で「サターン」と呼ばれ、ギリシャ神話の「クロノス」同一視され、土星の守護神でもある。このように、洋の東西を問わず古代より「数というものの神秘的な関係」をこの魔法人を用いて伝えられてきた。

作り方

　まず n × n の n が奇数の場合、正方形の辺の外側にピラミッドを作ります。
1　そのピラミッドの頂点から数を 1 から順に隣のピラミッドの頂点にむかって書いていきます。
2　次に今向かっていたやつとは逆の方向に 1 つ枡をずらして、またさっきと同じように数を書いていきます。2 のときに向かっていったピラミッドの頂点についたら一回手を止めます。そうしたら、外側にはみ出しているピラミッドを反対側に空いている枡に埋め込みます。パズルみたいに！ それで魔方陣の完成です！ この方法は証明されていないが、25 × 25 までは、できることがわかっている。だからきっと 101 × 101 など永遠にできることだろう。
次は n × n の n が 4 の倍数のとき。まず魔方陣を 4 × 4 の魔方陣の集まりになるように区切ります。4 × 4 の魔方陣それぞれの対角線に色をつけます。そして元の魔方陣の左上から順に数を 1 から並べていきます。色のついていないマスにある数字を点対称移動させます。そうしたら完成です。その他の魔方陣は少し大変なので割愛します。ぜひ挑戦してみてくだい。

特徴

　n × n が奇数のとき、その魔方陣の中心に来る数は 1〜n の 2 乗までの数の真ん中の数になる。またそれと交差する対角線のどちらかは交差が n の等差数列ができる。また、たとえばこの 3 × 3 の魔方陣の場合

論理パズル解説 3

Q3:3 匹の猫が 3 匹のネズミを捕まえるのに 3 分かかります。では、100 匹のネズミを 100 分で捕まえるには猫は最低何匹必要でしょう。

ここで、3 匹の猫 3 匹のネズミ、3 分とあるので 100 匹のネズミ、100 分なら 100 匹の猫だろう！ という人がいるかもしれませんがこれは間違いです！ 考えてみましょう、3 分で 3 匹のネズミを捕まえられるのならば 6 分で 6 匹のネズミを捕まえるには 3 匹でもいいわけです。なら答えは 3 匹だ！ ... とはなりません。3 匹の猫ならば 99 分で 99 匹のネズミを捕まえられます。なら残りの 1 匹は？ そう、残りの 1 匹までには 3 分かかってしまうのです。つまり、3 匹の猫ならば 102 分で 102 匹のネズミを捕まえられるが、100 分ではまだ 99 匹のままだということです。よって、答えは 4 匹となります。

A3:4 匹

三問の論理パズルを解いてみてどうでしたか？ こんなの余裕だよ ^ ^ という方や難しい...... という方もいるでしょう。ですが、これをきっかけに論理パズルに興味をもっていただけたのならうれしいです！ 最近では論理パズルを入社試験で使っている会社もあると聞きます。論理的に考える能力は今、求められています！ あなたも論理パズルを解いて論理的な思考を手に入れましょう！

おわりに

ここまで読んでみていかがだったでしょうか？ 私たちもまだまだ数学は勉強中で，まちがっているところやわかりづらい表現があるかもしれません．（校閲はがんばりましたが・・・）そして，数学に興味がわいた人は，もっと調べてみてください！（新しい発見があるかも？）

実は私は小学生のころにいくつかの高校でもらった数学研究同好会の部誌をいまだに持っています．当時は全然わからなかったのですが，勉強するにつれて読めるようになっていきました．数学はわかると，とっても面白いと思います．問題が解けたとき，公式の証明が一人でできたとき，知識と知識がつながった時，ここで数学が使えるんだ！ とわかった時，とても楽しいと思えるはずです！ すうけんではこの「楽しい」をみなさんに伝えようと文化祭に参加しています．ですので，みなさんが少しでも「わかった！ 楽しい！ 面白い！」と思っていただけることが，私たちにとってなによりの幸せです！

さいごに．

ここまで読んでくださってありがとうございました！

数学研究同好会一同

すうけんメンバー

＊＊＊＊	高等部 2 年	＊＊＊＊	高等部 2 年
＊＊＊＊	高等部 2 年	＊＊＊＊	高等部 2 年
＊＊＊＊	高等部 1 年	＊＊＊＊	高等部 1 年
＊＊＊＊	高等部 1 年	＊＊＊＊	高等部 1 年
＊＊＊＊	高等部 1 年	＊＊＊＊	高等部 1 年
＊＊＊＊	中等部 2 年	＊＊＊＊	中等部 2 年
＊＊＊＊	中等部 2 年	＊＊＊＊	中等部 1 年

数学研究会 会誌 第 3 号
2018 年 10 月 6 日　初版　第 1 刷発行
著作・編集　数学研究同好会
発行・印刷　数学研究同好会
監　　修　[redacted]