＝＝＝

【解答】

1　（1）$x=\frac{1}{18}$，-2（2）$\frac{\sqrt{5}}{5}$（3）0（時）1(分)$\frac{1380}{697}$(秒)（4）$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$(倍)

2　（1）ア…1　イ…7　ウ…1（2）(3，167)（3）72，　504(※記述については，　解説をご参照ください。)

3　（1）$2\sqrt{3}$（2）$(4\sqrt{3},\ -12)$（3）$\frac{656}{3}\pi$

4　（1）$2\sqrt{3}$（2）※解説をご参照ください。

5　（1）$\frac{7}{72}$（2）$\frac{739}{864}$（3）$\frac{1}{1296}$

＝＝＝

【配点】

1	各6点	小計　24点
2	（1）各2点（2）・（3）7点	小計　20点
3	各7点	小計　21点
4	各7点	小計　14点
5	各7点	小計　21点
		合計 100点

＝＝＝

【解説】

$\boxed{1}$　小問集合

（１）　$(\frac{9}{2}x+7)^2+(\frac{3}{3}+\frac{7}{2})^2=54-\frac{7}{2}x^2$

$(9x+140)^2+(2+7x)^2=216-14x^2$

$144x^2+280x+200=216-14x^2$

$144x^2+280x-16=0$

$18x^2+35x-2=0$

$(18x-1)(x+2)=0$

よって$x=\frac{1}{18}$，-2

（２）　解と係数の関係より$\alpha+\beta=6$,　$\alpha\beta=4$。

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36-16=20$,　　$\alpha>\beta$より$\alpha-\beta=2\sqrt{5}$。

(与式)$=\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}=\frac{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}=\frac{6-2\sqrt{4}}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

（３）　秒針が１周する前だと短針と長針の角度より長針と秒針の角度の方が大きくなる。よって 12 時の次に問題の条件を満たすのは秒針が１周回った後になる。

次に秒針，長針，短針が１秒で回る角度を求める。

秒針は 60 秒で１周するので $360\div60=6$(°)

長針は１時間で１周する。１時間は 3600 秒なので $360\div3600=\frac{1}{10}$(°)

短針は 12 時間で１周する。12 時間は 43200 秒なので $360\div43200=\frac{1}{120}$(°)

x秒後に条件を満たすとする。この時秒針はすでに１周していることに注意すると，

$$\frac{x}{10}-\frac{x}{120}=(6x-360)-\frac{x}{10}$$

これを解くと，$x=\frac{43200}{697}$となる。よって０時１分$\frac{1380}{697}$秒

（4）　正八面体に接している球と正四角錐に接している球をそれぞれ球O_1，球O_2，半径をそれぞれ r_1，r_2とする。

辺ＢＣ，ＤＥの中点をそれぞれ点Ｇ，Ｈとして，正八面体と球0_1をＡ，Ｇ，Ｆ，Ｈを通る平面で切断すると，図１の様になる。この時，◿AO_1Hと◿ASO_1は相似なので,

$$AH:AO_1=O_1H:SO_1$$

$$2\sqrt{3}:2\sqrt{2}=2:r_1$$

$$\text{よって}\ r_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

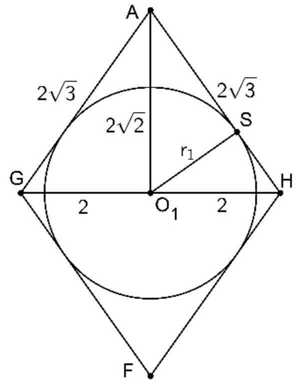

図１

正方形ＢＣＤＥの中心をＦ，辺ＢＣ，ＤＥの中点をそれぞれ点Ｇ，Ｈとする。正四角錐と球O_2をＡ，Ｇ，Ｈを通る平面で切断すると図２の様になる。◿ＡＦＨと◿ATO_2は相似なので,

$$FH:AH=TO_2:AO_2$$

$$2:2\sqrt{3}=r_2:2\sqrt{2}-r_2$$

$$\text{よって}\ r_2=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

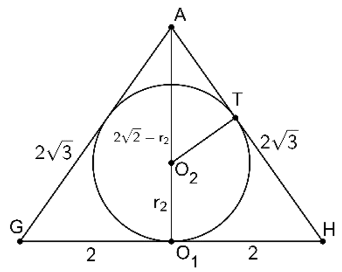

図２

求める答えは，$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

2　小問集合

（1）　中央値が 5.5 なので点数が 20 番目，21 番目の生徒はそれぞれ 5 点と 6 点である。よって 6 点以上の生徒は 20 人いる。表より 7 点以上の生徒は 19 人いるので，6 点の生徒は 1 人である。…**ア**

平均値が 5.525 点なので，全体の点数は 5.525×40＝221(点)である。2 点の生徒と 3 点の生徒の点数の合計は 221－(0＋2＋12＋20＋6＋35＋48＋45＋30)＝23(点)　2 点の生徒と 3 点の生徒の人数の合計は(5 点以下の生徒の人数は 20 人なので)20－(3＋2＋3＋4)＝8(人)

よって2点の生徒をx人，3点の生徒をy人とすると

$x+y=8$

$2x+3y=23$

よって$x=1$，$y=7$　すなわち**ア**…1　**イ**…7　**ウ**…1

（２）$a^2+3ab+2a+3b=2019$

両辺に1を足して因数分解すると$(a+1)(a+3b+1)=2020$となる。このとき$a+3b+1>a+1>1$である。$2020=2^2\times5\times101$なので$(a+1,\ a+3b+1)=(2,\ 1010),\ (4,\ 505),\ (5,\ 404),\ (10,\ 202),\ (20,\ 101)$となる。よって

$(a,\ b)=(1,\ 336),\ (3,\ 167),\ (4,\ 133),\ (9,\ 64),\ (19,\ 27)$このなかでa，bが共に素数なのは

$a=3$，$b=167$のみ。したがって$(3,\ 167)$

（３）bとcの最小公倍数は3の倍数ではないのでbは3の倍数ではない。

したがって$b=1$，7のいずれかである。$b=1$のとき，$a=63$，　$c=56$である。$b=7$のとき，aは9，　63のいずれか，cは8，　56のいずれかである。

よって考えられる$(a,\ c)$の組み合わせは$(9,\ 8),\ (9,\ 56),\ (63,\ 8),\ (63,\ 56)$であり，aとcの最小公倍数を求めると72，　504の２つである。

$\boxed{3}$　放物線と図形

（１）　Bの座標は$\left(\frac{c}{\sqrt{3}},\ c\right)$でありこれが放物線上にあるから$\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2=c$，　$\frac{c^2}{6}=c$　$c=0$は解ではないので

$c=6$。このとき1辺の長さは$\frac{2}{\sqrt{3}}c$よって答えは$\frac{2}{\sqrt{3}}\times6=2\sqrt{3}$

（２）　Bを通りＯＡに平行な直線と放物線の共有点を求めればよい。

$A(-2\sqrt{3},\ 6)$，$B(2\sqrt{3},\ 6)$，$O(0,\ 0)$よりＯＡの傾きは$\frac{0-6}{0-(-2\sqrt{3})}=-\sqrt{3}$。

直線は$y=-\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})+6=-\sqrt{3}x+12$

これと$y=\frac{1}{2}x^2$を連立させると$y=\frac{1}{2}x^2=-\sqrt{3}x+12$。　この方程式の解は共有点2つの$x$座標となるので$x=2\sqrt{3}$を含む。因数分解により$\frac{1}{2}(x-2\sqrt{3})(x+4\sqrt{3})=0$ 残る解は$x=-4\sqrt{3}$。

よってDの座標は$(4\sqrt{3},\ -12)$

（３） ①＋②－③と考える。それぞれ等積変形し円錐にすると，

$$①\ (4\sqrt{3})^2\pi\times12\times\frac{1}{3}=192\pi$$

$$②\ (2\sqrt{3})^2\pi\times12\times\frac{1}{3}=48\pi$$

$$③\ \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2\pi\times12\times\frac{1}{3}=\frac{64}{3}\pi$$

$$①+②-③=\frac{656}{3}\pi$$

4　平面図形と作図

（１） ⊿ＡＤＥと⊿ＡＤＣは合同である。よって∠ＡＣＤ＝30°である。またＡＤ＝1 よりＣＤ＝$\sqrt{3}$

またとおり∠ＡＣＢ＝90°なので∠ＤＣＢ＝60°となる。よってＢＣ＝$2\sqrt{3}$

（２） ①直線ＡＢ上にＰＡ＝１となるような点Ｐをとる。ただしＰ，Ａ，Ｂの順に点が並ぶようにする。

②線分ＰＢの中点を点Ｏとする。

③点Ｏを中心としＯＢを半径とする円を書く。

④点Ａを通り直線ＰＢに垂直な線と円の交点のうち片方を点Ｑとする。

⑤線分ＱＡを一辺とする正方形を書く。

（証明）⊿ＰＱＡ∽⊿ＱＡＢよりＰＡ：ＱＡ＝ＱＡ：ＢＡとなる。

よってＰＡ×ＢＡ＝ＱＡ^{2}となる。ＰＡ＝1 よりＱＡ＝$\sqrt{\mathrm{AB}}$　＜証明終＞

(次ページ図 1～図 4 参照)

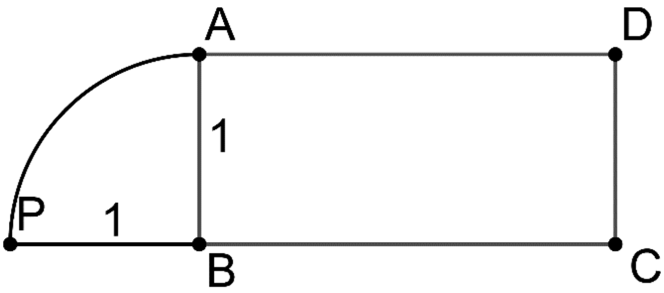

図１

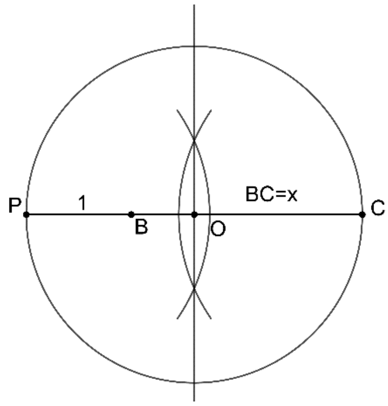

図２

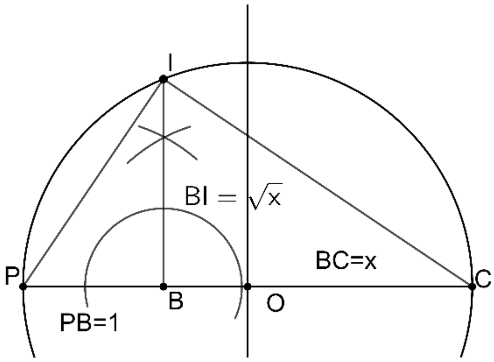

図３

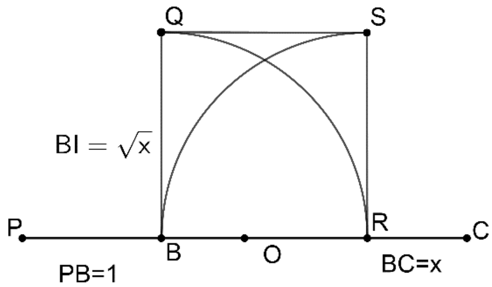

図４

5 立体図形と確率

（１） 先に正四面体の体積を出すと後の設問で便利である。ＡＢの中点をＤ，ＯＡの中点をＤ，Ｏから対面に下した垂線の足をＨとする。また，p＝ＯＰ，q＝ＯＱ，r＝ＯＲ とする。

$\mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AB}}{2}=3$，$\mathrm{DH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{DH}^2}=2\sqrt{3}$，　$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=2\sqrt{6}$

体積は$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{OH}\times\frac{1}{3}=18\sqrt{2}$。

三角錐Ｏ－ＰＱＲの体積は$18\sqrt{2}\times\frac{p\times q\times r}{6^3}=2\sqrt{2}$　。　　　$p\times q\times r=24$

(p，q，r)＝(1，4，6)，(2，2，6)，(2，3，4)とその並び替えであるから，その組み合わせは

6＋3＋6＝21 全事象は$6^3=216$通りであるから$\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$

※一辺の長さがaの正四面体の体積は$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$である。

（２） 共有点を持たない場合を考える。$p'=OP'$，$q'=OQ'$，$r'=OR'$とすると共有点を持たないのは，「$p>p'$かつ$q>q'$かつ$r>r'$」の場合と，「$p'>p$かつ$q'>q$かつ$r'>r$」の場合である。

pとp'だけについて考えると$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$の確率で$p<p'$となる。

q， rについても同じことが言えるので$(\frac{5}{12})^3\times 2=\frac{125}{864}$　よって答えは$1-\frac{125}{864}=\frac{739}{864}$

（３） 問題の条件より 2 つの三角形は共有点を持たないから（２）と同様に場合分けして考える。以下，「$p>p'$かつ$q>q'$かつ$r>r'$」の場合について計算する。

体積が$\frac{55}{6}\sqrt{2}$であることから$18\sqrt{2}\times\frac{p\times q\times r}{6^3}-18\sqrt{2}\times\frac{p'\times q'\times r'}{6^3}=\frac{55}{6}\sqrt{2}$。　計算により，

$p\times q\times r-p'\times q'\times r'=110$である。p，q，r の積が 110 を超えるものを探すと，

(p，q，r)＝(6，6，6)，(6，6，5)，(6，6，4)，(6，5，5)，(5，5，5)とその組みあわせである。

(p，q，r) ＝(6，6，6)， (6，6，5) ，(6，6，4)とすると p’，q’，r’の積はそれぞれ 106， 70，34 となり素因数に 6 より大きい整数を含むから不適である。

(p，q，r)＝(5，5，5)のときは(p’，q’，r’)の組み合わせは(5，3，1)などいずれも 5 を含むから二つの三角形が共有点を持つのでこれも不適である。したがって(p，q，r)が(6，6，5)， (6，5，4)とその組み合わせの場合について考える。

①(p，q，r)＝(6，6，5) とその組み合わせの場合

p’q’r’＝40 より(p’，q’，r’)は(5，4，2) とその組み合わせ。 (p，q，r)に対して(6，6，5)を対応させる方法は 3 通り，さらに(6，6，5)に対しては(5，4，2)，(5，2，4)と対応させることができるので 3× 2＝6 通り。

②(p，q，r)＝(6，5，4) とその組み合わせの場合

p’q’r’＝10 より(p’，q’，r’)は(5，2，1) とその組み合わせ。 (p，q，r)に対して(6，5，4)を対応させる方法は 6 通り，さらに(6，5，4)に対しては(5，2，1)，(5，1，2)と対応させることができるので 6× 2＝12 通り。

①，②より 6＋12＝18 通り。これに「$p'>p$かつ$q'>q$かつ$r'>r$」の場合を含めると

$18\times 2=36$。　全事象は6^6通りあるから答えは$\frac{36}{6^6}=\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1296}$