お詫び
配布した解答解説の一部に誤りがあったため，赤太字で訂正いたしました。
解説を読んでくださった方にご迷惑をおかけしたことをお詫びいたします。

解答

1 （1）$-\frac{1}{7}$　（2）$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$　（3）$x=70$　（4）$(-1,\ 1)$　$(2,\ 4)$

2 （1）$3:6+2\sqrt{3}$　（2）（I）34650 通り　（II）24990 通り

3 （1）3　（2）(r，2r+9)　（3）$\frac{13\sqrt{5}+2\sqrt{155}}{3}$　（4）8

4 （1）$\frac{5}{18}$　（2）$\frac{1}{180}$　（3）$\frac{1}{9}$

5 （1）9cm　（2）$3\sqrt{2}$cm　（3）$\frac{288}{17}\pi$cm²

配点

1 各 6 点

2 (1) 5 点 (2), (3) 各 6 点

3 各 6 点

4 (1) 5 点 (2) 6 点 (3) 7 点

5 (1), (2)各 5 点　(3)7 点
計 100 点

解説

$\boxed{1}$

（1）$(x+3y)^2-(x+2y)^2+(x+y)^2-2xy-6y^2$

$=(x+3y+x+2y)(x+3y-x-2y)+x^2+y^2+2xy-2xy-6y^2$

$=(2x+5y)y+x^2-5y^2=(2x+5y-5y)y+x^2=x^2+2xy=x(x+2y)$

ここにx，yの値を代入する。

$$\frac{\sqrt{35}+\sqrt{42}}{7}\left(\frac{\sqrt{35}+\sqrt{42}}{7}-\frac{2\sqrt{42}}{7}\right)=\frac{\sqrt{35}+\sqrt{42}}{7}\times\frac{\sqrt{35}-\sqrt{42}}{7}=\frac{35-42}{49}=-\frac{1}{7}$$

（2）$x^3-y^3-z^3+2xyz+x^2y+zx^2-xy^2-z^2x+y^2z+yz^2$

$=x^2(x+y+z)-x(y-z)^2-y^2(y-z)+z^2(y-z)$

$=x^2(x+y+z)-x(y-z)^2+(z^2-y^2)(y-z)$

$=x^2(x+y+z)+(y-z)-x(y-z)+(z^2-y^2)$

$=x^2(x+y+z)+(y-z)x(z-y)+(z+y)(z-y)$

$=x^2(x+y+z)+(y-z)(z-y)(x+y+z)$

$=(x+y+z)x^2+(y-z)(z-y)$

$=(x+y+z)x^2-(z-y)^2=(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

（3）まずすべての工程が終わった後に入っている食塩の量は$54+46-x=100-x$(ｇ)

となり，食塩水の量は$200+230+2x-x=430+x$(ｇ)となる。

$\frac{100-x}{430+x}\times100=6$　となるので，これを解いて　$x=70$

（4）点Ｐの座標を(p,p^2)とおき線分ＰＱの長さは $y=x+12$ に $x=p$　を代入して $y=p+12$

ここから，p^2 を引くので　$(p+12-p^2)$となる。ここで $y=x^2$ と $y=x+12$ の交点をＲ,Ｓとおく。三角形ＰＲＳにおいて底辺をＰＱとしたときの高さは $4-(-3)=7$　なので三角形ＰＲＳの面積は $7\times(p+12-p^2)\div2=35$ と表せる。

よって $p+12-p^2=10$　$(p+1)(p-2)=0$　ゆえに $p=-1,\ 2$

これらを$y=x^2$に代入して　$(-1,1)$　$(2,4)$

2

（1） 半円１の中心をD，半円２の中心をF，辺ＡＢと半円２の接点をE，点Eから辺ＢＣに引いた垂線と辺ＢＣとの交点をGとおく。

∠ＡＢＣ=30° なのでＥＧ：ＥＢ：ＧＢ=1：2：$\sqrt{3}$

ＧＦ：ＥＦ：ＥＧ=1：2：$\sqrt{3}$ でＥＧを１としたときに点A,E,Fと辺ＡＣと半円２の接点がなす図形が正方形となるので，ＡＢ=$2+\frac{2}{\sqrt{3}}$，ＥＦ=$\frac{2}{\sqrt{3}}$ となる。

◿ＧＥＦ∽◿ＡＢＣを用いてＧＥ：ＡＢ=3：$6+2\sqrt{3}$ であることからＢＣ：ＥＦ=3：$6+2\sqrt{3}$ でＢＣ=2ＢＤからＢＤ：ＥＦ=3：$3+\sqrt{3}$ となる。

よって半円１と半円２の半径の比は３：$3+\sqrt{3}$ である

（2）(I) 右に四回，奥に四回，上に四回移動すればよい。この十二回の移動の組み合わせなので

$_{12}C_4 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 = 34650$(通り)

(II) C を通る行き方とＤを通る行き方を求める。C を通る行き方はＡからＣまでの最短経路の総数とＣからＢまでの最短経路の総数をかければ求められるので，$_2C_1 \times {}_1C_1 \times {}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 8400$(通り)

D を通る行き方も同様に $_3C_1 \times {}_2C_2 \times {}_9C_2 \times {}_7C_4 \times {}_3C_3 = 3780$(通り)

C を通る行き方とＤを通る行き方を足すとＣとＤをどちらも通る生き方が二回足されることになるのでＣとＤをどちらも通る行き方を求めると

$_2C_1 \times {}_1C_1 \times 1 \times {}_9C_2 \times {}_7C_4 \times {}_3C_3 = 2520$(通り)

ＣもＤも通らない行き方は

全体－(C を通る行き方＋D を通る行き方－ＣもＤも通る行き方)

となるので 34650－(8400＋3780－2520)=24990(通り)

3

(1)円Aの半径をaとする。グラフより，円Aは各辺の長さが　9，12，15　の直角三角形に内接する内接円である。よって，三角形の面積と内接円の公式より，

$$9\times12\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a(9+12+15)$$

$$a=3$$

(2)円Aと円Bはy軸と直線②において接線を共有しているので，円Aの中心と直線②のy切片と円Bの中心は同じ直線上にあることがわかる。円Aの中心の座標は(1)より(－3, 3)であることがわかり，直線②のy切片の座標は(0，9)なので，三点を通る直線の式は，y=2x+9と求められる。円Bの半径はrなので，先ほどの式に，x=rを代入するとB(r，2r+9)がわかる。

(3) $y=\frac{3}{4}x^2$にB(r，2r+9)を代入すると，$r=\frac{4\pm2\sqrt{31}}{3}$が求められる。0<rなので，$r=\frac{4+2\sqrt{31}}{3}$　となる。また，三平方の定理より AB を斜辺とする直角三角形の比は $1:2:\sqrt{5}$　となる。よって，AB=(Bx－Ax)$\times\sqrt{5}$　となる。

したがって，$AB=\left(\frac{4+2\sqrt{31}}{3}-(-3)\right)\times\sqrt{5}=\frac{13\sqrt{5}+2\sqrt{155}}{3}$

(4) 円Cは,y軸と直線②に接しているので,円の中心はy軸と直線②の二等分線上にあることがわかる。この二等分線はy=2x＋9とy軸で垂直に交わるため，円Cは$y=-\frac{1}{2}x+9$上にあることがわかる。また，y軸において円Bと接点を共有するのでCのy座標は2r＋9になる。これを$y=-\frac{1}{2}x+9$に代入すると，x=－4rがもとめられる。よって，底辺ＢＣは　r－(－4r)=5r　また，高さは，2r+9－3=2r+6となる。　よって，△ＡＢＣは$5r\times(2r+6)\times\frac{1}{2}$とあらわせられる
△ＡＢＣ=440なので，式は$5r\times(2r+6)\times\frac{1}{2}=440$　　これを解くと，
r=8，－11　0<rより，r=8

4

(1) 2つの数の積が奇数になるためには，それぞれの数が奇数である必要がある。

2つの数字の1の位はそれぞれ奇数，2つの数字の10の位は残りの好きな数字でよい。

$$\frac{5\times4\times7\times6}{9\times8\times7\times6}=\frac{5}{18}$$

(2) 2つの数の積が221の倍数になるためには，片方の数が13の倍数，もう片方が17の倍数でなければならない。よって条件を満たすような組み合わせは

(13,68),(13,85),(26,17),(26,34),(26,51),(26,85),(39,17),(39,51),(39,68),(39,85),(52,17),(52,34),(52,68),(65,17),(65,34),(78,34),(78,51),(91,34),(91,68),(91,85)

の20通りある。全部の整数の作り方の組み合わせは9×8×7×6÷2=1512（通り）なので求める確率は

$$\frac{20}{1512}=\frac{5}{378}$$

(3) 2つの数の積が256　　の倍数になるためには，

64の倍数…A=64　32の倍数…左に加えてB=32,96　16の倍数…さらにC=16,48

8の倍数…さらにD=24,56,72　4の倍数…さらにE=12,28,36,52,68,76,84,92

2数の積の形はA・B　A・C　A・D　A・E　B・B　B・C　B・D　C・Cである。

(64, 32)(64, 72)(64, 12)(64, 28)(64, 52)(64, 92)(32, 96)(32, 16)(32, 48)(96, 48)

(32, 56)(96, 24)(96, 72)(16, 48)の14通りがあるから

$$\frac{14}{1512}=\frac{1}{108}$$

$\boxed{5}$

（1）AB の中点をP, 正六角形 ABCDEF の重心をH, 球の中心をIとすると,

PH=$6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$　IH=3　∠PHI＝90°　より∠OPH＝60°　OH=PH$\times\sqrt{3}=9$(cm)

（2）①

AB の中点を P とすると OP=$\sqrt{OA^2-\left(\frac{\mathrm{OB}}{2}\right)^2}=\sqrt{336-(2\sqrt{3})^2}$=18

正六角形 ABCDEF の重心を H とすると，PH＝$4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$=6

OH=$\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{PH}^2}=\sqrt{324-36}=\sqrt{288}=12\sqrt{2}$

球の半径を r とすると，r$\times\frac{12+18+18}{2}=\frac{12\times12\sqrt{2}}{2}$,　r＝$3\sqrt{2}$(cm)

（2）②

MN の中点を Q，DE の中点を R，Q から PR におろした垂線を QJ とすると,

中点連結定理から QJ＝$\frac{\mathrm{OH}}{2}$＝$6\sqrt{2}$,　PJ＝$12\times\frac{3}{4}$＝9,

PQ=$\sqrt{\mathrm{PJ}^2+\mathrm{QJ}^2}=\sqrt{9^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{17}$

球の中心を I とすると，△PQR は△PIQ と△RIQ と△PIR に分割できる。

△PQR＝$\frac{1}{2}$△OPR＝$\frac{1}{2}\times12\times12\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$＝$36\sqrt{2}$＝△IPR+△IRQ+△PIQ＝$3\sqrt{2}\times\frac{12+9}{2}$ +△PIQ＝$\frac{63\sqrt{2}}{2}$+△PIQ

△PIQ＝$\frac{9}{2}\sqrt{2}$

I から PQ に下ろした垂線を IS として，△PIQ＝PQ$\times\frac{\mathrm{IS}}{2}$＝$3\sqrt{17}\times\frac{\mathrm{IS}}{2}$＝$\frac{9}{2}\sqrt{2}$

$IS=\frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ 円の断面の円周上の一点を T として, IT＝r より $\mathrm{IS}^2+\mathrm{ST}^2=\mathrm{IT}^2=r^2$

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)^2+\mathrm{ST}^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$, $\mathrm{ST}^2=18-\frac{18}{17}=\frac{288}{17}$, $r^2\pi=\mathrm{IT}^2\pi=\frac{288}{17}\pi$(㎠)