まえがき

〇数学研究会について

早稲田実業学校数学研究会、通称「すうけん」は早実の非公認活動団体です。
数学好き早実生の、数学好き早実生による、数学好き早実生のための団体として発足し、日々活動を続けています。
普段は中・高等部一緒に週二日活動しています。
会員同士で面白い問題を出し合ったり、思いついたことを話し合ったり、 たまに真剣に議論したりと、生徒主体で楽しく活動しています。
また、数学オリンピックや数学甲子園にも挑戦しています。

〇メンバーの生態

　たいていの人が兼部をしています。運動部に入っている人も多いです。みんな数学が大好きです。

〇すうけんのやること

同好会への昇格!!
日本数学オリンピック・日本ジュニア数学オリンピックで結果を残す!!
数学甲子園出場!!

どれも重要なんです。とりあえず実績を残したい。
そして・・・
メンバーを増やす!!
とにかくメンバーを増やさなければ、今後が危ういです。

〇会誌について

　メンバーが興味のある内容についての研究・考察です。文化祭での展示内容とはまったく異なります。実は小中高では習わないような内容が書いてあったりして、そこそこ難しいところもあるとは思いますが、一通り目を通してみてください。もしかすると、新たな発見があるかも!!

※校正をがんばりましたが、メンバーが書いたものなので間違いがあるかもしれません。ご了承ください。

〇数学のルール

会誌を読む方の中には、数学初心者の方もいると思います。以下にこの会誌を読むうえで最低限の必要な知識をまとめましたので、ぜひ読んでください。

自然数　$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$
整数　$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$
有理数　分数で表せる数（整数も含む）
無理数　分数で表すことのできない数（円周率など）
実数　数字を並べて表せる数（無理数も含む）

↓小学校で使う□や〇は次のように書きます.
a, b, c など　定数（なんかしらの決まった数が入る）
α, β, θ など　定数（それぞれアルファ, ベータ, シータ）
x, y, z など　変数（中身の数は場合によって変わる）

π　円周率 3.14159…を表す（パイと読む, 無理数）
a^2　$a \times a$ (a の 2 乗と読む)
$\sqrt{a}$　2 乗すると a になる数
$\log_a b = n$ のとき、$a^n = b$
関数　片方の変数を決めると，もう片方の変数も決まるような式（たとえば $y = ax^2$ など）
命題　真（正しい）か偽（誤り）かが決まる問題や定理
定義　何かを明確に決める約束
公理　証明なしに正しいと認める約束
定理　定義や定理から導かれる真の命題

目次

第 I 部

正多角形の作図

中等部 1 年　＊＊＊＊＊＊

突然ですが、みなさんは正多角形の書き方を知っていますか？ 小学生の皆さんは、分度器で角度を測って書いたり、コンパスと定規だけで正六角形が書けることを、教わった人もいるかもしれません。しかし、ここではコンパスと定規（目盛りを使わない！）だけで、正多角形の作図をしていきたいと思います。

1. 作図可能な正多角形

頂点の数が素数のもの

頂点の数が少ない順に、正三角形、正五角形、正 17 角形、正 257 角形、…です。正 257 角形なんて全く想像がつきませんよね。まあ、正 257 角形ともなると、ほぼ円にしか見えません。

頂点の数が 100 以下のもの

正三角形、正四角形、正五角形、正六角形、正八角形、正 10 角形、正 12 角形、正 15 角形、正 16 角形、正 17 角形、正 20 角形、正 24 角形、正 30 角形、正 32 角形、正 34 角形、正 40 角形、正 48 角形、正 51 角形、正 60 角形、正 64 角形、正 68 角形、正 80 角形、正 85 角形、正 96 角形
こんな感じです。

2. 正多角形の作図方法

ここでは、正三角形、正五角形、正六角形の作図をしていきたいと思います。説明の関係で、正五角形は正六角形の後とします。また、ここに書いてある作図方法は、何個かある方法の中から 1 つ選んでいるので、他に方法があるものがあります。ここでは円に内接する正多角形の書き方を説明します。

正三角形

方法

① 中心を O とする円の直径 AB をとる。
② 線分 AB の垂直二等分線を書き、円 O との交点を C、D とする。
③ 線分 OA の垂直二等分線と円 O との交点を E、F とするとき、三角形 EFB は正三角形となる。

証明

三角形 EGO、EGA が合同で、線分 EO、AO は半径なので EO ＝ OA ＝ AE。よって三角形 AEO が正三角形。そのため、角 EOB、EOF が 120°となる。よって三角形　EFB は正三角形。　　Q.E.D.

図は次のページ

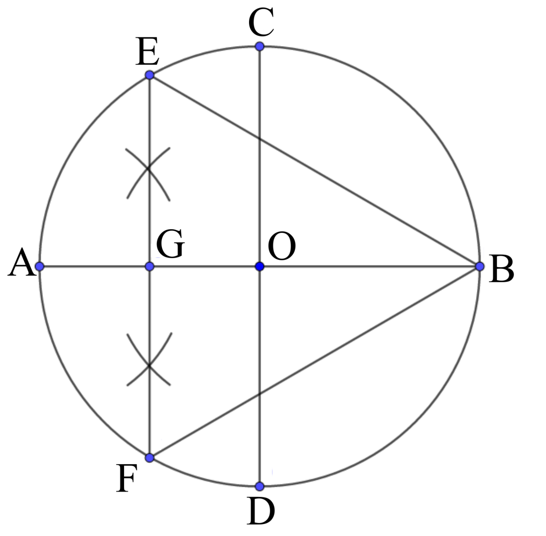


図１　正三角形の作図

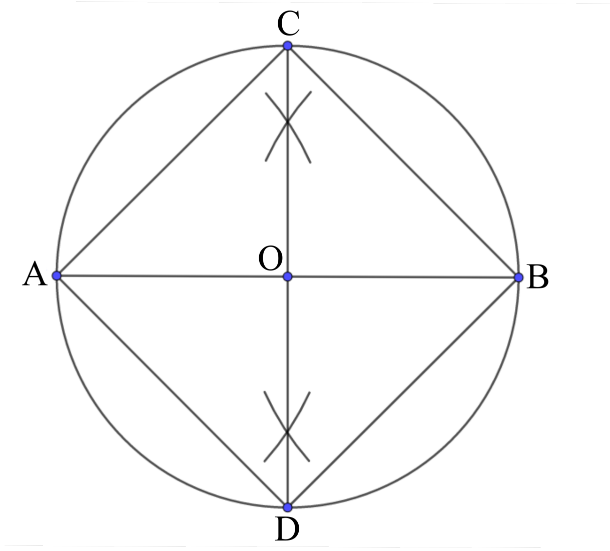


図２　正四角形の作図

正四角形

方法

① 中心を O とする円の直径 AB をとる。

② 線分 AB の垂直二等分線を書き、円 O との交点を C、D とする。

③ 四角形 CADB は正四角形となる。

証明

線分 AB、CD は直交しているため角 COA、角 COB、角 BOD、角 DOA は 90°となる。そのため、線分　AC ＝ CB ＝ BD ＝ DA となる。さらに、線分 CO、AO、DO、BO は半径なので、CO ＝ AO ＝ DO ＝ BO となるため、角 ACO、OCB、CBO、OBD、BDO、ODA、DAO、OAC は 45°となり、角　ACB、CBD、BDA、DAC は 90°となる。よって、四角形 CADB は正四角形となる。　　　Q.E.D.

正六角形

方法

① 中心を O とする円の直径 AB をとる。

② B を中心として、BO を半径に円を書き、円 O との交点を C、D とする。

③ D を中心として、DO を半径に円を書き、円 O との交点で、B ではない方の点を E とする。

④ A を中心として、AO を半径に円を書き、円 O との交点で、E ではない方の点を F とする。

⑤ 点 C、B、D、E、A、F を結ぶと、六角形 CBDEAF は、正六角形となる。

証明

線分 CO、BO、DO、EO、FO、AO は半径ですべて同じ長さで、線分 FC、CB、BD、DE、EA、AF も、それぞれの弧で円 O の半径と同じ長さになっているので、三角形 FOC、COB、OBD、OED、EOA、AOF は全て正三角形となる。そのため、角 FCB、CBD、BDE、DEA、EAF、AFC は全て 120°、よって六角形　FCBDEA は正六角形。

ここまでは、方法がわかりやすいので、知っていたものもあったと思いますが、次からは難しくなります。

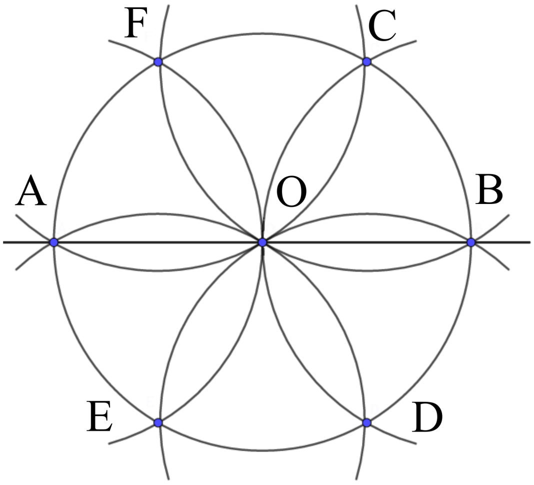


図 3　正六角形の作図

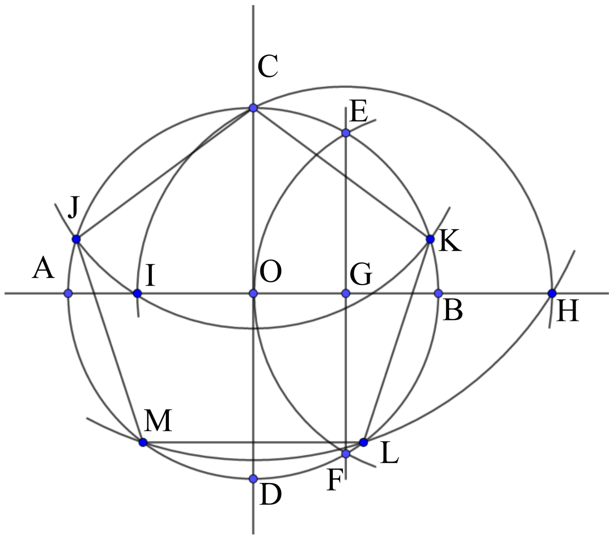


図 4　正五角形の作図

正五角形

方法

① 中心を O とする円の直径を AB とする。

② 線分 AB の垂直二等分線を書き、円 O との交点を、C、D とする。

③ 線分 OB の垂直二等分線を書き、円 O との交点を、E、F とする。OB の中点を G とする。

④ 点 G を中心として、GC を半径に円を書き、直線 AB との交点を I、H とする。

⑤ 点 C を中心として、CI を半径に円を書き、円 O との交点を J、K とする。

⑥ 点 C を中心として、CH を半径に円を書き、円 O との交点を M、L とする。

⑦ 点 C、K、L、M、J を結んでできる。五角形 CKLMJ が、正五角形となる。

証明

正五角形の作図の説明は難しいので、とばしてもらっても結構です。
正五角形が内接できる円の半径を 2 として考える。
まず、このときの正五角形の一辺の長さを求めてみる。
正五角形を中心で 5 分割し、図 5 の三角形で考える。
$\theta = 36^\circ$ とすると、
$5\theta = 180^\circ$　よって、
$\sin 2\theta = \sin(180^\circ - 3\theta) = \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
$2\sin\theta\cos\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
両辺を $\sin\theta$ で割って、
$2\cos\theta = 3 - 4\sin^2\theta = 3 - 4(1 - \cos^2)$
よって、$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$ より、$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

これより、$\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
したがって、正五角形の一辺の長さは、
$AB = 2 \times AH = 2 \times 2\sin 36^\circ = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$
よって、長さ 2 から、長さ $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ができればよいこととなる。
図 6 において、M は半径 OA の中点なので、$OM = 1$
よって $BM = \sqrt{5}$
A を端点とする直径上に、MC=MB となる点 C をとる。
このとき、$OC = \sqrt{5} - 1$ なので、$BC = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ となる。
よって、B を中心とし、半径 BC の円を書き、円 O との交点を D とすれば、線分 BD が求める正五角形の一辺である。Q.E.D.

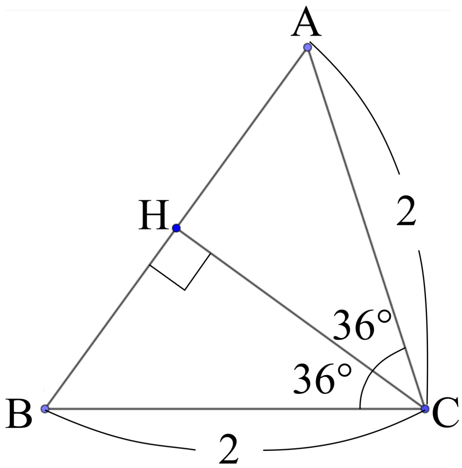


図 5

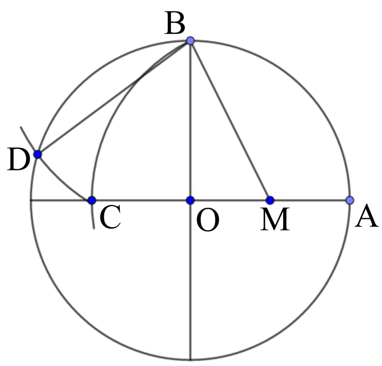


図 6

最後に少し面白い話をします。
正 17 角形の作図方法は、あの有名な数学者、ガウスによって発見されました。1798 年 3 月 30 日、ガウスはベッドで目を覚ますとなり、正 17 角形の作図方法を思いついたということです、ガウスはこのとき 19 歳でした。哲学になろうか数学者になろうか迷っていたガウスは、この発見に自信を得て数学者の道を選んだという話もあります。ちなみにガウスの父は、ガウスにレンガ職人になってほしいと思っていたそうです。

おわりに

いかがだったでしょうか？ 今回、ここに書いた作図方法というのは、本当に一部にすぎないので、ぜひ興味がある人は調べてみると面白いです。

最後にここまで読んでくださった方には感謝します。ありがとうございました。

第 II 部

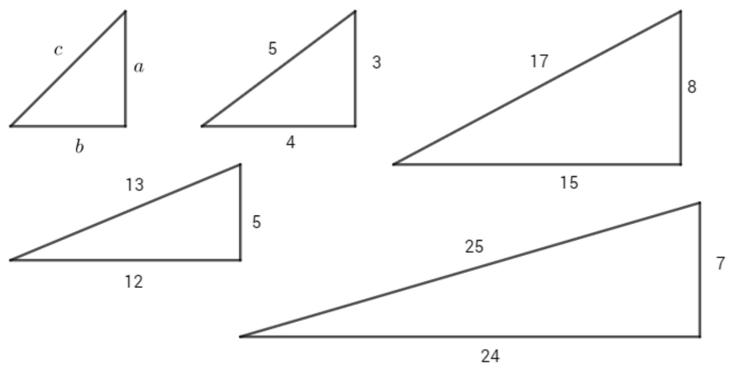
三平方の定理

中等部 1 年　＊＊＊＊＊＊

直角三角形の縦と横の長さから斜めの長さを求めることができます。知っている人も多いと思いますが、これが「三平方の定理」です。今回は、この素晴らしい定理について紹介していきたいと思います。

1. 三平方の定理とは

三平方の定理とは、直角三角形において、直角をはさむ二辺の長さを a、b とし、斜辺の長さを c とするとき、$a^2+b^2=c^2$ が成り立つという内容です。数学者ピタゴラスによって発見された定理で、「ピタゴラスの定理」ともいいます。日本でこの定理を「三平方の定理」と呼ぶようになったのは、太平洋戦争が始まった翌年の 1942 年です。外国で使われている呼び名を避けたいという要請を受け、当時、東京帝国大学の数学科教授であった末綱恕一が名づけました。次の直角三角形は、3 辺の比が整数比になる主なものです。



2. 定理の証明

三平方の定理の証明は何通りあると思いますか？ なんと、100 種類以上もあるそうです。ここでは、厳選して紹介していきます。

<証明 1>
合同な 4 つの直角三角形を右の図のように並べると、内側に 1 辺の長さ c の正方形ができる。

正方形 ABCD の面積は、4 つの直角三角形の面積と正方形 EFGH の面積の和に等しい。よって、

$(a+b)^2=\frac{1}{2}ab\times 4+c^2$

$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$

$a^2+b^2=c^2$　　Q.E.D.

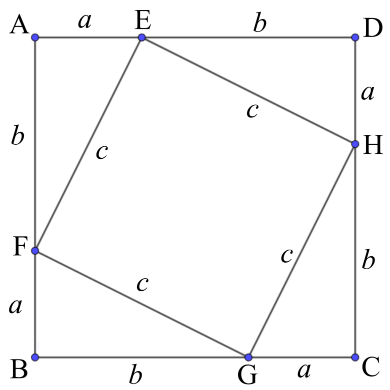


図 7

<証明 2>

合同な 4 つの直角三角形 (ただし $a > b$) を右の図のように並べると、内側に 1 辺の長さが $a - b$ の正方形ができる。

正方形 ABCD の面積は、4 つの直角三角形の面積と正方形 EFGH の和に等しい。よって、

$(a-b)^2 + \frac{1}{2}ab \times 4 = c^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = c^2 \qquad a^2 + b^2 = c^2 \qquad$ Q.E.D.

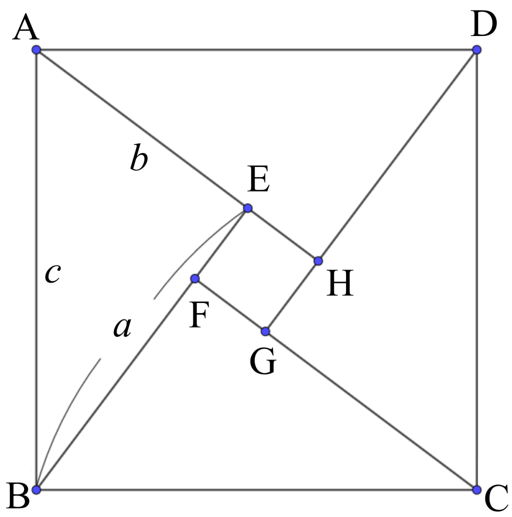


図 8

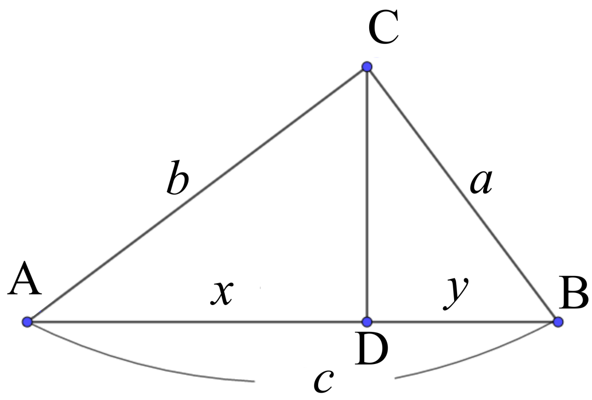


図 9

ここで<証明 3>の前に、$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、2 つの角が等しい場合は、$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ が成り立つことに注意してください。

<証明 3>

図 9 で、$\triangle CAB \sim \triangle DAC$ が成り立つので、$c : b = b : x$

したがって、$b^2 = cx$ 　同様に、$a^2 = cy$

足して、$a^2 + b^2 = cx + cy \qquad a^2 + b^2 = c(x+y) \qquad a^2 + b^2 = c^2$

最後の一つは図をみて考えてください。

<証明 4>

同じ番号の図形どうしが対応しています。

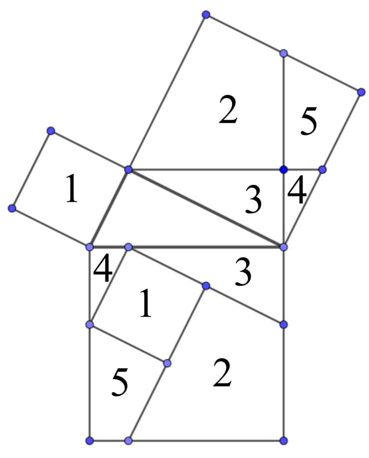


図 10

3. 三平方定理の応用

最後に、三平方の定理を使った問題を紹介します。

<問題>

もし、東京タワーのてっぺんに登れるとしたら、どれくらい先まで見渡せるでしょうか。ただし、東京タワーの高さは 0.333km とし、地球を半径 6378km の球として考えます。また、光の屈折を考えないものとします。

<解説>

求める長さを $x$km とする。$(a+b)^2-a^2=a^2+2ab+b^2-a^2=2ab+b^2$ と変形できるので、

$x^2=(6378+0.333)^2-6378^2=2\times6378\times0.333+0.333^2=4247.858889$

$x \fallingdotseq 65$

答え 約 65km

光の屈折を考えると、計算結果の約 6 %増しなので、約 69km 先まで見渡せることになります。三平方の定理を使うと、こんな計算もできるようになるんです！

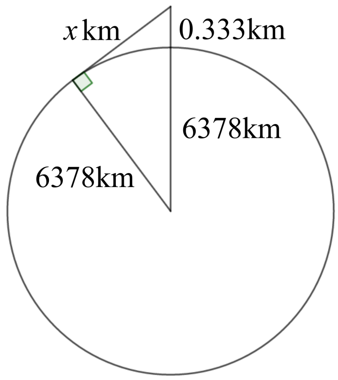


図 11

三平方の定理に興味を持ってくださったでしょうか。興味を持った方は、ぜひもっと調べてみてください。

第 III 部

確率

中等部 3 年　＊＊＊＊＊＊

1 はじめに

確率と聞いたら皆さんは何を思い浮かべますか？ 宝くじで当たる確率や、テストで適当に答えを書いて正解する確率といったようなものがあります。確率は、実際に生活をしていて使う機会が多い分野だと思います。今回は、この確率という世界について面白い問題と共に紹介したいと思います。

2 確率の誕生

確率という考え方は今から 300 年位前、数学者のパスカルとフェルマーによって生み出されました。この 2 人は親しく、賭けについての問題を文通によって解決しました。ここから確率という概念が生まれ、この文通は「世界を変えた手紙」と呼ばれています。

3 大数の法則とは

問題

サイコロ（このサイコロは 6 面であり、何も細工がされていない物とする）をふって 1 の目が出る確率は？

この様な問題であればすぐに $\frac{1}{6}$ とわかります。これは感覚的には理解することが出来ますが、本当に正しいのでしょうか？ このような問題を正当化してくれるのが大数の法則です。

大数の法則には、弱法則と強法則という 2 種類があります。弱法則とはコイン N 回投げにおいて、任意の正数 ε を与えられたとき、表の頻度が $\frac{1}{2}$ より ε 以上離れる確率が N の値が大きくなると ε の大きさに関わらず、0 に近づくことを主張しているものです。強法則とはコイン無限回投げを考えたときに、表の頻度が $\frac{1}{2}$ でない確率が 0 であるというものです。

4 面白い問題

ここからは、いくつかの確率の問題に触れてみたいと思います。

問題 1

ある刑務所に A、B、C という 3 人の囚人がいました。しかし、近々 3 人がまとめて処刑されることになっています。ところが、3 人のうち 1 人が助かるということになりました。誰が助かるかは明かされておらず、それぞれの囚人が「私は助かるのか？」と聞いても看守は答えません。そこで、A は看守に向かってこう頼みました。「私以外の 2 人のうち少なくとも 1 人は死刑になるはずだ。その者の名前が知りたい。私のことではないから教えてくれてもよい

だろう？」すると看守は「B は死刑になる。」と教えてくれました。それを聞いた囚人 A は「これで助かる確率が $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ になった」と喜びました。果たして囚人 A が喜んだのは正しいのでしょうか？

問題が長くなってしまいましたが、意味は分かりましたか？
一見正しそうに思えますが実は正しくありません。

解説 1

A が助かる確率は (「A が助かる」かつ「看守が B が死刑と言う」)/「看守が B が死刑と言う」で表せます。分子は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ となります。分母は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{2}$ となります。よって答えは $\frac{1}{3}$ です。

今の問題は条件付き確率という考え方を使いました。条件付き確率とは、事象 A が起きたと分かったもとでの事象 B が起こる確率のことで、$P(B|A)$ と書きます。数式による定義は $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$ です。ベン図を書くと理解しやすくなります。

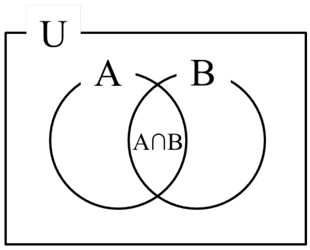


図 12　ベン図

問題 2

スイカを 100kg 分トラックで運んでいます。このスイカは計算上 99 %が水分です。しかし、目的地に着いた時には計算上の水分の割合が 98 %になってしまいました。さて、最初 100kg だったスイカは、およそ何 kg になったでしょう？

大体の人が直感的に思い浮かべる答えは、大きな値になると思います。しかし、答えは　直感に反した値となります。

解説 2

最初のスイカの水分以外は 1 %＝ 1kg です。これが、目的地に着いた時には全体の 2 %に相当しています。よって、その時の重さは 1kg÷2 %＝ 50kg となります。

今の問題を踏まえた上で次の確率の問題を解いてみてください。

問題 3

1000 人に 1 人の割合でかかる病気がある。この病気に関して最初に行う検査では、病気にかかっている人を陽性と判定する確率と病気にかかっていない人を陰性と判定する確率はともに 99 %です。この検査で陽性となった人が実際にその病気にかかっている確率はどのくらいでしょう？

解説 3

ベイズの定理に値を代入すると $\frac{1\times 0.99}{1\times 0.99+999\times 0.01}\fallingdotseq 0.09$ となります。よって、答えは約 9 %です。

この問題も先程の問題と同様に直感に反した答えだったと思います。ここで、今使ったベイズの定理について説明し

ます。

まず A、B を事象とし、B が成立しているという条件の下に A が成立している条件付き確率を $P(A|B)$ とします。$P(B) \neq 0$ の時には $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ が成り立ちます。また、$P(A) \neq 0$ の時には $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ が成り立ちます。$P(A \cap B) = P(B \cap A)$ より $\dfrac{P(A|B)}{P(B|A)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ となり、$P(B|A) = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$ が導けます。これがベイズの定理です。問題 3 で使ったベイズの定理は今の式の事象 B が 2 種類になったものです。一般に事象 B が k 種類の時、事象 B_i が起こる条件付確率 $P(B_i|A)$ は $\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A \cap B_j)} = \dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A|B_j)}$ となります。

最後に、無限の中からの無作為抽出の問題を 2 問紹介します。

問題 4

0 と 1 の間にある無数の実数の中から均等の確率で無作為に 1 つ選び、その数を X とします。X がちょうど $\dfrac{1}{2}$ となる確率はいくつでしょう？

解説 4

求める確率を $\varepsilon > 0$ とすると、どの実数も ε の確率で選ばれます。しかし、このような実数は無数にあるため $\varepsilon \times \infty = \infty$ となり、1 を超えてしまい矛盾します。よって求める確率は 0 です。ちなみに、無限を考えたときに個々の選ばれる確率が 0 でも全事象の確率は 1 になります。（カントールによって証明された。）

問題 5

0 と 1 の間にある無数の有理数の中から均等の確率で無作為に 1 つ選び、その数を X とします。X がちょうど $\dfrac{1}{2}$ となる確率はいくつでしょう？

解説 5

求める確率を $\varepsilon > 0$ とすると問題 4 と同じ理由で矛盾が生じるため、$\varepsilon > 0$ ではありません。しかし、この問題の場合 $\varepsilon = 0$ としても矛盾が生じます。なぜなら、有理数の集合は可算集合であるため、1 列に並べて n 番目となる有理数を $r(n)$ とし、Ω を全事象とすると $1 = P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = r(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ となるからです。よって、この問題の答えは「不可能」です。

紹介した 2 問はどちらも実際に行うのは無理ですが、数学ではこのようにみなされています。

終わりに

確率について興味を持っていただけましたか？ ここで紹介したもの以外にも、もっと面白くそして難しい問題や定理、公式があります。また、ここで紹介した内容でもさらに深く突っ込めるものもあります。これを機に是非色々と調べてみて下さい。

第 IV 部

ホントに使える数学“ゲーム理論”

中等部 3 年　＊＊＊＊＊＊

1. はじめに

多くの人は数学の授業中に先生が「数学は役に立ってるんだぞ。これがなきゃ生活が成り立たないんだ」というのを耳にしたことがあるだろう。僕もある。実際この言葉は嘘ではない。素数によって暗証番号が作られネット上で買い物ができるし、微分により経済を予測することで安定した生活を送っている。例を挙げ始めればキリがない。しかしこう思う人もいるだろう。「んな事いわれてもなぁ。実感がないしな。筆算とか長方形の面積の求め方ならまだしも…」ある意味正論だ。普段の生活で突然複雑な図形な変なところの角度を求めたり、めんどくさい積分をする人はまずいないのだから。もちろんそれらにも面白さはあるのだが、もっと役に立つことをやってみようではないか。ここではゲーム理論を勉強してみよう。簡単に言えば「複雑な人間関係への賢い対処法を見つけよう」というものだ。なんと専門知識は特に要らないしめんどくさい数式もなしだ。これを読めばちょっと違った毎日が送れるようになるかも！？

2. ゲーム理論とは

最初にちょっとだけ堅い話。ゲーム理論はフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが 19 世紀の初めに考えだした理論だ。まだまだ新しい考え方だ。ゲーム理論は応用数学科や経済学部など多くのところで使用されたり、研究されている。その他にも心理学と組み合わされたり、人間にとどまらず生物学でも応用されている。まずは「複雑な人間関係への賢い対処法を見つけよう」という目標を理解していれば問題ないが一応もう少しだけ詳しく書くと「利害の異なる複数の人達の間の全体的な状況を客観的に分析する」と言うことができる。

人間は物事を自分視点で考えることは得意だ。これが行き過ぎると自己中と呼ばれてしまうのだが笑 しかし程度の差こそあるものの人はみな問題の全体像を俯瞰することが苦手である。全体像を掴むためにまず重要なのは「相手の視点になってみて相手はこの問題がどう見えているのか考える」ことだ。小学校でも習った「他人の気持ちを考える」ということだ。こんなに単純な事だがこれが難しい。どうしても目の前のことにしか頭が回らなくなってしまうのだ。

そこで次に必要なのが「単純化」することだ。ゲーム理論では状況から次の 3 つのことを読み取る。

・プレイヤー…その状況の中で中心的な役割を持つ人物

・戦略…プレイヤーのもつ選択肢のこと

・利得…戦略によって起こりうる結果の望ましさのこと

ここまで単純化すると全然実践的でなくなるのではないかと心配する人もいるかもしれない。確かに細かい部分は見えなくなるかもしれないが、それにより本当に重要な部分が見えてくる。それにより今までは自分のことや目先のことしか分からなかったのが周りのことやもう少し長期的ことを考えた上で問題を考えることができる。また異なる問題のように見える 2 つの状況が実は同じパターンだったという事にも気づくことができるだろう。実際ゲーム理論には典型的なパターンがいくつかある。それについて少し見ていこう。

3. 囚人のジレンマ

ここまでちょっとまじめな話を続けてきたので少し例を出そう。

2 人の囚人が司法取引を持ちかけられた。条件は次のとおりだ。

① 2 人とも自首したならば刑期は 5 年

② 2 人とも黙秘したならば刑期は 1 年

③ 片方だけ自首したならば自首した方は釈放、しなかった方は刑期が 10 年

囚人たちはどうするのがベストだろうか。

このままではよくわからない。釈放を狙って、自首するか、安全策として黙秘したほうが良いのか。ここで先程の 3 つの要素を使って分析してみよう。

・プレイヤーは 2 人。仮にＡさんとＢさんとしよう。

・それぞれには「自首する」か「黙秘する」という 2 つの戦略がある。

・戦略によって起こりうる結果は 2 × 2=4 通りあるので表にすると分かりやすい。

A \ B	黙秘	自首
黙秘	どっちも 1 年	A さん:10 年 B さん:釈放
自主	A さん:釈放 B さん:10 年	どっちも 5 年

こうして表にしてみると非常に理解しやすくなったのではないだろうか。さっきまではただの文章で書いてあったものが整理され視覚的にも分かりやすくなっている。こういったこともゲーム理論における「単純化」の一つで問題解決に重要である。

またこのように整理して考えてみると片方の人の行動を仮定した状態でもう一人の状況を考えられる。まずはＡさんになりきって考えてみよう。

・Ｂさんが黙秘した場合、Ａさんが黙秘すれば 1 年、自首すれば釈放である。それならば自首した方が良いに決まっている。

・Ｂさんが自首した場合、Ａさんが黙秘すれば 10 年、自首すれば 5 年である。そうすると自首したほうが良い。

つまりどちらにしてもＡさんは自首したほうが良いということが簡単にわかる。

しかしそれはＢさんも全く同じで自首したほうが良いに決まっている。すると結果的に 2 人とも自首をして刑期 5 年が確定する。しかしここで少しだけ立ち止まって考えてみよう。2 人が仲間であった場合、2 人にとってベストな選択肢は共に黙秘をすることである。2 人ともすぐに刑務所を出てくることができる。それなのに 2 人で仲良く自首して 5 年も入っていなきゃいけないのである。

これは「囚人のジレンマ」と呼ばれる非常に有名な状況だ。自分の利益のみを最優先に考えるとこのようにチーム全体としての利益が減ってしまい、自分自身も損をしてしまうことがあるのだ。ちなみにこの「お互いが相手の戦略に対して最適な行動を取った状態」のことをゲーム理論では「ナッシュ均衡」と呼ぶ。このナッシュ均衡は非常に安定している。お互いが自分にとって最適な行動を取っているからそこから戦略が変わることが考えにくいからだ。

人生において囚人になることは滅多にないだろう（むしろなったら困る）。しかしこういった状況は案外色んな所にある。

例えば環境問題。みんなが真剣に取り組めば決して困難な問題ではないのだが、そのためにはお金がかかる。自分たちのみやったんではバカみたいである。それに協力しない企業や国が出てくるとそれだけでやる意味が激減してしまう。だから未だに解決の糸口がつかめていない。値下げ競争も同じだ。どこか 1 つのお店が値下げすれば利益を奪

われないために自分たちも値下げする。すると他のところも同じように考えて値下げしどんどん安くなる。適度にやるのは良いが多くの場合行き過ぎて、全体の利益が減り、デフレ・スパイラルになる。

クラスでの行事においてもみんなが本気で取り組めば良い結果が残り、達成感と素晴らしい思い出を得ることができる。しかし一人ひとりが自分だけの目先の利益を考えるならば適当にやったほうが楽だ。クラスをまとめるのもなかなか難しいものだ。この状況の解決策は「協力する」ことだ。みんなが現状を理解して、全体の利益を少しでも考慮すれば状況は一気に改善する。善意に訴えて解決することもあるがそうは行かないことも多いというのは多くの人が思うだろう。それで解決すれば苦労はない。つまり自分勝手な行動をしたほうが得をするからこのような問題が起こるのだ。その集団の中で非協力的行動をした人に罰を与えるのも時には効果的である。そうして少しずつ集団全体の利益を増やして、個人も得をするようにするのだ。

「囚人のジレンマ」の状況は日常生活でも多く見られる。自分の身の周りの状況について考えて例を見つけてみよう。

(おまけ)

今回はナッシュ均衡が1つしかなかったがそうではない場合もある。

例えばじゃんけん。これは相手の手によって何を出すべきかが3つとも異なるため、ナッシュ均衡が作られない。むしろナッシュ均衡のあるゲームでは成り立たない。常に同じ結果になるのだから。

例えば交通ルール。車が右側を走るか左側を走るかが人によって違ってしまってはとても運転できない。しかし、右に揃えるか左に揃えるかは大きな問題ではない。揃っている状態が大切なのだ。そのためナッシュ均衡は2つ存在することになる。

また2人で共同でゲーム開発をするとしたら、使うソフトを揃える必要がある。これもナッシュ均衡が複数あるが時にはそふとによって優劣がある場合もある。その場合ナッシュ均衡ではあるけれどあまり望ましくないものも存在する。そういった状況は「コーディネーションゲーム」と呼ばれる。興味のある人は調べてみてほしい。

4. 先を読もう

囚人のジレンマでは1回しか行動しない状況を考えてきた。しかし現実ではもっと時間的な広がりをもった状況の方が良くある。当たり前のことだが今の行動が未来の結果を左右するのだ。例えばテストの点数は多くの場合、それまでにどれくらい勉強したかによって変わってくる。だからテストを受けてる時に全然わからなくて後悔しても遅い (笑)。

この例では登場人物が自分1人だが複数のプレイヤーがいる場合もある。先程の値下げ競争がそれに当たる。Aさんが値下げする→Bさんも利益を持っていかれないように負けじと値下げする→Aさんや他の人がさらに値下げする→…　というように相手の行動を受けて自分の行動を変化させるのだ。だから「先のことを考えて行動する」ほうが有利なのだ。当たり前過ぎて多くの人が意識していないがゲーム理論ではこれをはっきりと考えることが大切だ。

簡単なゲームを考えてみよう。10枚のコインを2人で交互に取っていくとしよう。自分の番に取れる枚数は1枚または2枚だ。一見するとシンプルだが面白い問題に見える。しかしここで少し論理的に考えてみよう。勝つためには自分が9枚目を取らなければならない。9枚目を取るためには6枚目を取れば良い。なぜなら相手が7枚目のみを取ったら自分は8,9枚目を取れば良い、相手が7,8枚目を取ったら自分は9枚目のみを取ればよいのだ。同じように6枚目を取るためには自分が3枚目を取らなければならない。そのためには自分が後手になる必要がある。つまり後手になりさえすれば勝てるのだ。このように単に「先のことを考える」だけでなく「終わりから逆算して考える」ことも時には効果的である。

コインゲームの勝ち方の例

相手	1・2		4		7		10
自分		3		5・6		8・9	

しかし現実の状況はとても複雑で、そこには大きな問題がある。さっきのコインのゲームは明確な終わりがあったが実際には「ここで終わり、ゲームセット」というのがはっきりしていないことが良くある。つまり「どこまで視野を広く持つか」ということだ。いくつか例を出そう。

スーパーで生鮮食品が売れ残ってしまったとしよう。腐ったら捨てるしかないので値下げしてでも元手を回収しようとするのが普通だろう。しかしそうすると常連客は値下げするまで買わないという人が出てくるだろう。そうすると本来は定価で売れるはずのものを安く売ることになってしまう。そうすると利益がどんどん下がっていってしまう。それならば最初から値下げしないのが懸命という結論になる。

もっと単純な例を出そう。会社で部下がサボっているのを見つけたとしよう。しっかりと咎めるのが上司の役目だろう。しかし実際のところどうだろう。叱ったり罰を与えるのはお互いに良い気持ちはしないし, めんどくさい。それならば叱らないほうが得という結果になってしまう。もちろんそうすれば部下はもっとサボるだろうし会社としての利益は下がってしまう。

このように先のことを考えるとは言っても「目先の利益」と「長期的な利益」は対立することが多くある。これのことを「時間不整合性の問題」という。これは非常によくあるものでしかも解決が難しい。

この問題への対処法としては「定期的に長期的な目標とその達成状況を確認する」ということや「短期的な誘惑に負けた場合は自分自身にペナルティを下す（コミットメントという)」といった事がある。もちろんそれをすることさえ短期的な誘惑に負けたらなんの意味もないのだが (笑)。　しかし何もしないよりは一定の効果は期待できるだろう。

また長期的なことを考えるとナッシュ均衡も変化する事がある。囚人のジレンマでは「お互いに協力しない」のがナッシュ均衡だったが、同じような状況が繰り返されるとしてみよう。すると「相手が裏切ったらこっちも裏切る」という選択が可能になる。そういった状況になれば協力するほうが懸命だということが簡単に分かり「お互いに協力する」という選択肢もナッシュ均衡となりうるのだ。また社会などにおいては協力することの多い集団の方が発展しやすく、個人も良い状況になって行くことが多い。今ある問題について相手を打ち負かそうとするばかりではなく協力できないか考えることも大切なのだ。

5. 終わりに

今年はゲーム理論を勉強してみた。本格的に勉強しようとすると集合などについての理解が必要で大変なようだが、そういった専門知識がなくてもこのように様々な面白いことを勉強できた（全く難しい数学がなかったので書いていて少し不安になったくらいだ（笑)。ゲーム理論を普段の生活に応用することはすぐにはできないかもしれない。ゲーム理論では「プレイヤーをはっきりさせる」ことや「相手の目的を明確にする」ことが必要だ。これがなかなか難しく、色々な人が関わっていて誰が問題の本質となっているのか分かりにくい。自分のほんとうの目的をペラペラと喋る人も少ないかもしれない。でもここで使われている考え方自体はすぐに取り入れられるものばかりだ。それにゲーム理論に限らず状況を単純化して数学的な思考をするというのは本当に役に立つ。これを読んで少しでも「数学は使える」ということを実感してもらえたら幸いだ。

【参考資料】

マンガでやさしくわかるゲーム理論　　川西 諭　　日本能率協会マネジメントセンター

第 V 部

さまざまな群

高等部 1 年　******

こんにちは。数学研究会代表の丹戸です。この会誌の編集も担当しています。早数セミナーで群論を勉強していたので、群論について書きました。今回のテーマは「さまざまな群」です。わかりづらいところがあるかもしれませんが、とりあえず読んでみてください。

1　群論とは？

多くの人が聞いたことないのではないでしょうか。数学は主に代数、幾何、解析の 3 つの分野にわかれています。そのなかで、群論は代数に分類されます。代数というのは超簡単に言えば、数字の代わりに文字をおいて、方程式をいじくる学問です。そして、群論というのは「群」というものについての分野です。方程式の解や、図形の回転など、対称性と深ーい関わりがあり、素粒子や分子とも関係があるのだとか。
まずは「群」の定義からはじめてみましょう。

2　群の定義

G をある対象の集まりとする。次の (i)〜(iv) を満たすとき、G を群 (group) という。
(i) G の要素 a, b に対して，ある演算・があり，$a \cdot b$ も G に入る.
(ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$　（結合法則）を満たす.
(iii) 単位元と呼ばれる e があり，$a \cdot e = e \cdot a = a$ となる.
(iv) a に対して逆元 a^{-1} が存在して，$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ となる.

「集まりってなんだよ！」って感じがしますが、数字でないこともあると考えてください。
a^{-1} という記号は“エー・インバース”と読みます。
群かどうかを確かめるには、(i)〜(iv) のすべてが当てはまるかどうか調べます。

群その 1

例えば、整数は足し算についての群です。
(i)，(ii) は成立。$1 + 0 = 0 + 1 = 1$ となるので単位元は 0、5 の逆元は -5 です。

群その 2

また、0 を除く有理数はかけ算についての群です。
(i)，(ii) は成立。$3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$ となるので単位元は 1、$\dfrac{3}{2}$ の逆元は $\dfrac{2}{3}$ となります。(i)、(ii) の説明は割愛します。
G の要素が有限個の場合、G を有限群といいます。また、要素の個数を G の位数とよび、$\#(G)$ 書きます。

3　置換群

　はじめに、言葉の意味を説明します。
　置換…置き換えのこと
置換の積…2 個の置き換えを合わせた置換を、1 回目の置換と 2 回目の置換の積という。
ここでは、最初の置換を右に、1 回目の置換を左に書くが、逆の書き方の場合もある。
置換群…置換の積について閉じている集まり
位数…（その）置換群に含まれる置換の個数

この具体例としてあみだくじが挙げられます。その場合、置換は横の線を意味します。

群その 3〜あみだくじ〜

　縦に 3 本あみだくじを考えて、一番上の部分に 1、2、3 の番号を付けて、一番下はどの数字から来たものかを（1 3 2）のように表すことにします。
一番左と真ん中の線をつなぐ横の線を置換（1 2）で表します。1 は 2 へ、2 は 1 へ動きます。真ん中の線をまたぐこともできます。置換（1 3）で表すことができるからです。（図 2）この場合互換（横の線）は（1 2）、（2 3）、（1 3）の 3 種類あります。この 3 つの組み合わせですべてのパターンを網羅することができます。このようにすると、どんなあみだくじでも上から順に置換を使って書き表すことができます。だから、あみだくじは最初に別の線を選べば、同じところに到着することはないのです。

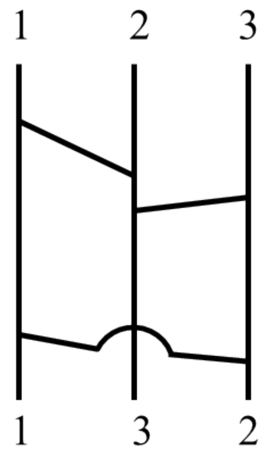


図 13　あみだくじ

4　可換群

可換な積…$A \cdot B = B \cdot A$ が成り立つ積
非可換な積…$A \cdot B = B \cdot A$ が成り立つとは限らない積
可換群…さきほどの群の定義に加え、$A \cdot B = B \cdot A$ の条件も満たしている群。アーベル群ともよばれる。

　普通に計算するときはいつも、交換しても何の問題もないわけですが、群の定義からすると、交換できないこともあるのです。
　これをおさえた上で、もう一度先ほどの群を考えてみます。（1 2）（2 3）と（2 3）（1 2）を比べると、左の結果は（3 1 2）、（2 3 1）となって結果が変わりました。いわゆる交換法則は成り立たないのです!! 正確な表現としては、非可換な積のほうがよいでしょう。
ここでの群は、できたあみだくじ全体です。単位元 e は横の線がないあみだくじ（1 2 3）です。
逆元は下にくっつけて余分な線を省くと、単位元となるようなものが存在します。
$G = \{(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(2\ 1\ 3),(2\ 3\ 1),(3\ 1\ 2),(3\ 2\ 1)\}$ また、$\#\ (G) = 6$、非可換群です。
※置換にはほかの表し方を用いることがあります。

5　巡回群

群その 4〜正三角形の合同変換〜

A を正三角形を重心を中心に 120°左回りに回転　の変換とします。
　このとき $\left\{e, A, A^2\right\}$ は、すべての元が A の累乗になっています。(A を何回か行ったものだけで群が構成されている。) このような群を巡回群とよびます。
元が 3 個ならば 3 次巡回群とよび、C_3 と表します。巡回群は、可換群の条件も満たしています。

　この場合演算は、「回転」です。先ほどは置換でしたし、足し算や引き算のこともあります。三角形の要素が群の元になるところも面白いと思いませんか？ 平面だけでなく立体でも群をつくることが可能です。

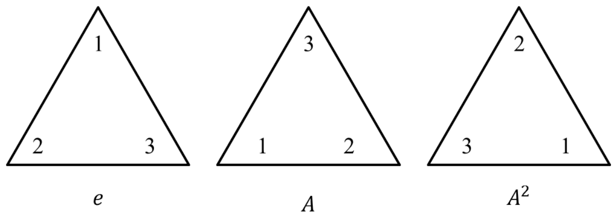


図 14　あみだくじ

6　4 元数群

　高校になるとあらわれる不思議な数、複素数。2 乗して -1 になる数はないはずだったのに、i という文字を使って表すというルールが出現します。ちなみに実数と虚数を組み合わせた複素数の集合 $\mathbb{C}$ は足し算について群です。
複素数…$a + bi$(ただし a, b は実数である) で表せる数のこと。

　その拡張に 4 元数（ハミルトン数）とよばれるもののがあります。それは $a + bi + cj + dk(a, b, c, d'$ は実数) と表します。この 4 元数について足し算やかけ算を考えます。そのまえに複素数で考えてみます。
$\alpha = a + bi,\ \alpha' = a' + b'i$ とすると $\alpha + \alpha' = (a + a') + (b + b')i$、また、$\alpha\alpha' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$ です。

　同じように考えると、足し算はこのようになります。
$\alpha = a + bi + cj + dk,\ \alpha' = a' + b'i + c'j + d'k$ として、$\alpha + \alpha' = (a + a') + (b + b')i + (a + a')j + (b + b')k$ である。
かけ算は $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k$ という定義のもと、以下のようになる。
$\alpha\alpha' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - cd')i + (ac' + ca' - bd' + b'd)j + (ad' + da' + bc' - cb')k$
また、$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$ となる。

　かけ算についての群である 4 元数群 Q の元は $1, -1, i, , -i, j, -j, k, -k$ の 8 つです。単位元は 1、逆元は符号を反転させたものになります。

　ここまで、様々な群を見てきました。群論はいろいろなところに用いることができます。個々では紹介しなかったものがたくさんあります!　今回は 4 元群という、以前から気になっていた部分を理解する良い機会だったと思います。群論は数学の中でもとても便利で面白い分野です。これからももっと勉強を続けたいと思いました。

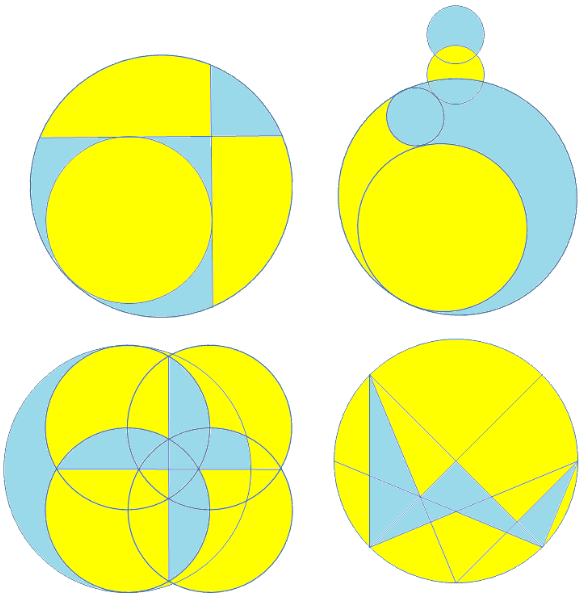
あとがき

会誌はいかがだったでしょうか。少しでも理解して頂いたり、面白いと思って頂ければ幸いです!!

今回の会誌も、さまざまなテーマの文章がありました。編集しながらほかのメンバーの文章に圧倒されました。三平方の定理や確率はとても身近ですよね。ゲーム理論は「数学がこんなところに！」という感じで驚きでした。正多角形の作図や群論はとても面白い部分であるのに、中高で学ばないのが悲しいぐらいです。数学研究会は興味のあることや、好きなことを、自由に勉強できて伸ばすことのできる素晴らしい場所です。来年以降ももっとパワーアップして文化祭に参戦するつもりですので、ぜひまた来てください!!そしてこの会誌を読んでくださった方々に感謝を申し上げたいと思います。ありがとうございました。

最後に・・・

数学研究会は晴れの日でも雨の日でも元気に数学をしています。
興味のある方はぜひ、すうけんに来てください！



会誌執筆者

＊＊＊＊＊＊　高等部１年
＊＊＊＊＊＊　高等部１年
＊＊＊＊＊＊　中等部３年
＊＊＊＊＊＊　中等部３年
＊＊＊＊＊＊　中等部１年
＊＊＊＊＊＊　中等部１年

数学研究会 会誌 第２号

2017 年 9 月 30 日　初版　第 1 刷発行
著作・編集　　数学研究会
発行・印刷　　数学研究会
監　　　修　　＊＊＊＊＊＊